

# Dyn. Systeme in der Zahlentheorie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Dies ist eine übersetzte Zusammenfassung der ersten Kapitel des Buches „Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory“ von Harry Furstenberg.

## 1. (Gleichmäßige) Rekurrenz

**Def.** Ein **dynamisches System** ist ein Paar  $(X, G)$  bestehend aus einem kompakten metrischen Raum  $X$  und einer Gruppe oder einem Monoid  $G$  mit Wirkung  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut/End}(X)$ ,  $g \mapsto T_g$ ,  $T_g(x) := g.x$ .

**Def.** Ein **Untersystem** eines dynamischen Systems  $(X, G)$  ist eine Teilmenge  $Z \subseteq X$  mit  $T_g(Z) \subseteq Z$  für alle  $g \in G$ .

*Bem.* Falls  $G = \mathbb{Z}$  oder  $M = \mathbb{N}$ , dann bezeichnen wir mit  $T := T_1$  den Erzeuger der Aktion und nennen  $(X, T)$  ein **zyklisches System**.

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $T : X \rightarrow X$  stetig. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **rekurrent**, falls für alle Umgebungen  $V \subset X$  von  $x$  ein  $n \geq 1$  existiert mit  $T^n(x) \in V$ .

*Bem.* Sei  $X$  sogar ein metrischer Raum,  $x \in X$  rekurrent. Dann gibt es eine s.m.s. Folge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $d(T^{n_k}(x), x) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $T : X \rightarrow X$  stetig. Dann heißt

$$Q(x) := \overline{\{T^n x \mid n \geq 1\}} \subseteq X$$

**abgeschlossener Vorwärtorbit** von  $x \in X$ .

- Lem.** •  $x \in X$  ist rekurrent  $\iff x \in Q(x)$   
•  $x \in Q(y) \implies T(x) \in Q(y) \iff Q(x) \subseteq Q(y)$   
• Die Relation  $xRy : \iff x \in Q(y)$  ist transitiv.

**Thm (Birkhoff).** Sei  $X$  ein kompakter topologischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  stetig. Dann gibt es einen rekurrenten Punkt  $x \in X$ .

**Def.** Sei  $K$  eine kompakte Gruppe,  $a \in K$  und  $T(x) := ax$ . Dann heißt  $(K, T)$  ein **Kronecker-System**.

**Thm.** In einem Kronecker-System sind alle  $x \in K$  rekurrent.

**Def.** Ein Homomorphismus zwischen zwei dyn. Systemen  $(X, G)$  und  $(X', G)$  (zweimal die gleiche Gruppe oder Monoid  $G$ ) ist eine  $G$ -äquivalente stetige Abbildung  $\phi : X \rightarrow X'$ .

**Def.** Ein dyn. System  $(Y, G)$  ist **Faktor** eines dyn. System  $(X, G)$ , wenn es einen surjektiven Homomorphismus  $(X, G) \rightarrow (Y, G)$  gibt. Man nennt  $(X, G)$  dann eine **Erweiterung** von  $(Y, G)$ .

*Bem.* Sei  $\phi : X \rightarrow Y$  surjektiv. Dann kann man  $Y$  mit der Menge der Fasern von  $\phi$  identifizieren.

**Thm.** Sei  $\phi : (X, T) \rightarrow (Y, T)$  ein Morphismus von zyklischen Systemen. Wenn  $x \in X$  rekurrent ist, dann auch  $\phi(x)$ .  
Allgemeiner:  $x \in Q(y) \implies \phi(x) \in Q(\phi(y))$

**Def.** Sei  $(Y, T : Y \rightarrow Y)$  ein zyklisches System,  $K$  eine kompakte Gruppe und  $\psi : Y \rightarrow K$  stetig. Setze

$$X := Y \times K, \quad T : X \rightarrow X, \quad (y, k) \mapsto (Ty, \psi(y)k).$$

Das System  $(X, T)$  wird **Gruppenerweiterung** von  $(Y, T)$  mit  $K$  oder **Schiefprodukt** von  $(Y, T)$  mit  $K$  genannt.

*Bem.* Die Gr.  $K$  wirkt auf  $(X, T) = (Y \times K, T)$  durch Rechtstransl.:

$$R : K \rightarrow \text{Aut}(X), \quad k \mapsto R_k, \quad R_k(y, k') := (y, k'k).$$

Die Homöomorphismen  $R_k$  kommutieren mit  $T$ , sind also Automorphismen des dynamischen Systems  $(X, T)$ .

**Thm.** Sei  $(X = Y \times K, T)$  eine Gruppenerw. von  $(Y, T)$  und  $y_0 \in Y$  rekurrent. Dann sind die Punkte  $\{(y_0, k) \mid k \in K\}$  rekurrent.

*Bem.* Durch Erweiterung mit der zykl. Gr.  $\mathbb{Z}_m$  kann man zeigen:

**Prop.** Ist  $x \in X$  in  $(X, T)$  rekurrent, dann auch in  $(X, T^m)$ .

**Bsp.** Sei  $T := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist das System

$$(T^2, (\theta, \phi) \mapsto (\theta + \alpha, \phi + 2\theta + \alpha))$$

eine Gruppenerweiterung des Kronecker-Systems  $(T, \theta \mapsto \theta + \alpha)$ . Somit sind alle Punkte des Torus  $T^2$  rekurrent. Aus der Rekurrenz des Punktes  $(0, 0)$  erhält man:

**Prop.** Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon > 0$  gibt es eine ganzzahlige Lsg der diophantischen Ungleichung  $|\alpha n^2 - m| < \epsilon$ .

*Bem.* Durch Verallgemeinerung auf den  $d$ -dim Torus zeigt man:

**Prop.** Sei  $p(X) \in \mathbb{R}[X]$  mit  $p(0) = 0$ . Dann gibt es für alle  $\epsilon > 0$  eine Lsg der diophantischen Ungleichung  $|p(n) - m| < \epsilon$ ,  $n > 0$ .

**Def.** Sei  $M$  ein topol. Raum und  $K \subseteq \text{Iso}(M)$  kompakt. Sei  $(Y, T)$  ein zykl. System und  $\psi : Y \rightarrow K$  stetig. Setze

$$X := Y \times M, \quad T : X \rightarrow X, \quad (y, u) \mapsto (Ty, \psi(y)u).$$

Das System  $(X, T)$  heißt **isometrische Erweiterung** von  $(Y, T)$ .

**Prop.** Sei  $(X, T)$  eine isom. Erweiterung von  $(Y, T)$ . Dann ist  $X = \cup X_\alpha$ , wobei  $X_\alpha$  abgeschlossene  $T$ -invariante Teilmengen von  $X$  sind, sodass das System  $(X_\alpha, T|_{X_\alpha})$  Faktor einer Gruppenerweiterung von  $(Y, T)$  ist.

**Prop.** Sei  $(X, T)$  eine isom. Erweiterung von  $(Y, T)$  und  $y_0 \in Y$  rekurrent. Dann sind die Pkte  $\{(y, m) \mid m \in M\}$  rekurrent.

**Def.** Sei  $G$  eine abz. Gruppe/Monoid und  $\Lambda$  ein kompakter metr. Raum. Sei  $\Omega := \Lambda^G \cong \prod \Lambda$  der kompakte metrisierbare Raum der Funktionen von  $G$  nach  $\Lambda$ . Die **reguläre Wirkung** von  $G$  auf  $\Omega$  ist

$$G \mapsto \text{Aut/End}(\Omega), \quad g \mapsto T_g, \quad T_g(\omega)(g') := \omega(g'g).$$

Ein **Bebutov-System** ist ein Untersystem von  $(\Omega, G)$ .

*Bem.* Sei  $\{g_1, g_2, \dots\} = G$  eine Abzählung von  $G$ . Dann ist eine Metrik auf  $\Omega$  definiert durch

$$d(\omega, \omega') := \sum 2^{-n} d(\omega(g_n), \omega'(g_n)).$$

**Def.** Für  $\omega_0 \in \Omega$  ist der Abschluss des Orbits von  $\omega_0$ ,

$$X_{\omega_0} := \overline{\{T_g(\omega_0) \mid g \in G\}},$$

$G$ -invariant. Das dynamische System  $(X_{\omega_0}, G)$  wird das von  $\omega_0$  **erzeugte Bebutov-System** genannt.

**Def.** Ein **symbolischer Fluss** ist ein Bebutov-System mit endlichem  $\Lambda$  und  $G \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ . Die Elemente von  $\Omega$  sind dann unendliche/doppelt-unendliche Folgen von Elementen von  $\Lambda$ . Man bezeichnet  $\Lambda$  dann als **Alphabet**.

**Def.** Ein **Wort** über  $\Lambda$  ist eine endl. Sequenz von Elementen aus  $\Lambda$ . Die Länge  $|w|$  eines Wortes ist die Länge der Sequenz.

**Prop.** Für eine Sequenz  $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$  sind äquivalent:

- $\omega$  ist rekurrent.
- Jedes Wort in  $\omega$  kommt ein 2. Mal an einer anderen Pos. in  $\omega$  vor.
- Jedes Wort aus  $\omega$  kommt unendlich oft in  $\omega$  vor.

*Bem.* Ein rekurrentes Wort  $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$  hat die allgemeine Form

$$\omega = [(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)]w^{(3)}[(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)] \dots$$

mit  $a \in \Lambda$  und Wörtern  $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots$ . Damit kann man zeigen:

**Def.** Eine **Partition** einer Menge ist eine Darstellung dieser Menge als Vereinigung disjunkter Teilmengen.

**Lem (Hilbert).** Sei  $\mathbb{N} = B_1 \cup \dots \cup B_q$  eine Partition von  $\mathbb{N}$  und  $l \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig. Schreibe

$$P(x_1, \dots, x_l) := \{x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \mid 0 \leq k \leq l, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l\}.$$

Dann gibt es  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_l$ , sodass unendlich viele Translationen von  $P(m_1, \dots, m_l)$  in demselben  $B_j$  enthalten sind.

*Bem.* Sei  $(X, T)$  ein zykl. System und  $f : X \rightarrow \Lambda$  stetig. Dann ist

$$(X, T) \rightarrow (\Lambda^{\mathbb{N}}, T), \quad x \mapsto (f(x), f(Tx), f(T^2x), \dots)$$

ein Homomorphismus zyklischer Systeme.

**Thm.** Seien  $\Lambda_1, \Lambda_2$  komp. Räume und  $\phi : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$  eine Abbildung. Für  $\omega \in \Lambda_1^{\mathbb{N}}$  definiere  $\omega' \in \Lambda_2^{\mathbb{N}}$  durch  $\omega'(n) := \phi(\omega(n))$ .

Falls  $\omega$  rekurrent ist und zusätzlich  $f$  in allen Punkten  $\omega(n)$  stetig ist, dann ist auch  $\omega'$  rekurrent.

**Prop.** Sei  $K$  eine komp. Gruppe und  $\xi \in K^{\mathbb{N}}$  rekurrent. Dann ist  $\eta \in K^{\mathbb{N}}$  definiert durch  $\eta(n) := \xi(n)\xi(n-1) \dots \xi(1)$  rekurrent.

**Def.** Eine Teilmenge  $S$  einer abelschen topologischen Gruppe / eines Monoids  $G$  heißt **syndetisch**, wenn eine kompakte Menge  $K \subset G$  existiert, sodass  $\forall g \in G : \exists k \in K : gk \in S$ .

*Bem.* Eine Teilmenge  $\{s_1 < s_2 < \dots\} = S \subset \mathbb{N}$  ist genau dann syndetisch, wenn die Größe  $s_i - s_{i-1}$  der „Lücken“ zw. Elementen aus  $S$  beschränkt ist. Solche Mengen heißen auch **relativ dicht**.

**Def.** Sei  $(X, G)$  ein dyn. System. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **gleichmäßig rekurrent**, falls für alle Umgebungen  $V \subset X$  von  $x$  die Menge  $\{g \in G \mid g.x \in V\}$  syndetisch ist.

**Def.** Ein dyn. System  $(X, G)$  heißt **minimal**, wenn es keine echte abgeschl. Teilmenge von  $X$  gibt, die inv. unter der  $G$ -Wirkung ist.

**Lem.** Sei  $(X, G)$  ein dyn System. Es sind äquivalent:

- $(X, G)$  ist minimal
- $\forall x \in X$  : der Orbit  $Gx$  ist dicht in  $X$
- $\forall \emptyset \neq V \subset X$  offen :  $\exists$  endlich viele Elemente  $g_1, \dots, g_n \in G$  :

$$g_1^{-1}V \cup \dots \cup g_n^{-1}V = X.$$

**Thm.** Sei  $(X, G)$  ein minimales dynamisches System.

Dann sind alle  $x \in X$  gleichmäßig rekurrent.

*Bem.* Aus Zorns Lemma folgt: Jedes dyn. System besitzt ein minimales Untersystem. Es folgt:

**Thm.** Jedes dyn. System hat einen gleichm. rekurrenten Pkt.

**Thm.** Sei  $(X, G)$  ein dyn. System,  $x \in X$ . Dann sind äquivalent:

- $x$  ist glm. rekurrent.
- Das Untersystem  $\overline{Gx}$  ist minimal.

**Thm.** In einem Kronecker-System ist jeder Pkt glm. rekurrent.

**Thm.** Sei  $(X, T)$  eine Gruppenerw. oder isometrische Erweiterung von  $(Y, T)$  mit Projektion  $\pi : (X, T) \rightarrow (Y, T)$  und  $y_0 \in Y$  glm. rekurrent. Dann sind die Pkte  $\pi^{-1}(y_0)$  glm. rekurrent.

*Bem.* Es folgt durch Betr. eines dyn. Systems auf dem  $k$ -dim Torus:

**Thm.** Seien  $p_1(X), \dots, p_k(X) \in \mathbb{R}[X]$  Polynome.

Für alle  $\epsilon > 0$  ist die Teilmenge der nat. Zahlen, die

$$|e^{2\pi i p_1(n)} - e^{2\pi i p_1(0)}| < \epsilon, \dots, |e^{2\pi i p_k(n)} - e^{2\pi i p_k(0)}| < \epsilon$$

gleichzeitig erfüllen, syndetisch.

**Prop.** Sei  $\Lambda$  ein endl. Alphabet. Ein Punkt  $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$  oder  $\omega \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$  ist genau dann glm. rekurrent, wenn für jedes Wort in  $\omega$  die Menge der Positionen, an denen dieses Wort auftaucht, syndetisch ist.

*Bem.* Eine rekurrente Sequenz  $\omega$  in der allgemeinen Form

$$\omega = [(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)]w^{(3)}[(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)] \dots$$

ist glm. rekurrent, wenn die Länge der  $w^{(n)}$  beschränkt ist.

Es existieren also nichtperiodische, glm. rekurrente Sequenzen.

**Def.** Ein **Vokabular** ist eine Teilmenge  $V$  aller Wörter über einem Alphabet  $\Lambda$ , für die gilt:

- Jedes Teilwort eines Wortes aus  $V$  ist ebenfalls in  $V$ .
- Jedes Wort in  $V$  ist Teilwort eines längeren Wortes aus  $V$ .

**Def.** Sei  $V$  ein Vokabular. Sei dann  $S(V) \subset \Lambda^{\mathbb{N}}$  die abgeschl., transaktions-inv. Menge aller Sequenzen, die nur Wörter aus  $V$  enthalten.

**Lem.** Sei  $V$  ein Vokabular, das folgende Bedingung erfüllt: Für alle  $l \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $L \in \mathbb{N}$ , sodass für alle Wörter  $w \in V$  der Länge  $|w| = l$  gilt:  $w$  ist in jedem Wort  $v \in V$  der Länge  $|v| = L$  enthalten. Dann sind alle Sequenzen in  $S(V)$  glm. rekurrent.

*Bem.* Sei  $\Lambda = \{a_1, \dots, a_r\}$  und  $w_1, \dots, w_r$  Wörter über  $\Lambda$ , die jeweils alle Buchstaben aus  $\Lambda$  enthalten. Sei  $V_1 := \Lambda$  die Menge der Wörter der Länge 1 über  $\Lambda$  und induktiv  $V_n$  die Menge der Wörter, die aus einem Wort  $w \in V_{n-1}$  durch simultane Substitution

$$a_1 \rightarrow w_1, \dots, a_r \rightarrow w_r$$

hervorgehen und deren Teilwörter. Das Vokabular  $V := \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  heißt dann **substitution minimal set**. Alle Sequenzen in  $S(V)$  sind gleichmäßig rekurrent.

*Bem.* Seien  $d_1, d_2, \dots \in \mathbb{N}$  mit  $d_n \mid d_{n+1}$  für alle  $n$ . Schreibe nun  $\mathbb{Z}$  als disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{Z} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (d_k \mathbb{Z} + a_k) \quad \text{mit } a_1, a_2, \dots \in \mathbb{Z}.$$

Sei  $\Lambda$  kompakt und  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\Lambda$ . Setze  $\omega(n) := \lambda_k$ , falls  $n \in d_k \mathbb{Z} + a_k$ . Wenn nun  $[-N, N] \subset \sqcup_{k=1}^l (d_k \mathbb{Z} + a_k)$ , dann gilt für alle  $n \in [-N, N]$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ :  $\omega(n) = \omega(n + q \cdot d_l)$ . Somit tritt jedes Wort in  $\omega$  periodisch auf und  $\omega$  ist glm. rekurrent.

**Def.** Eine Teilmenge  $R \subset \mathbb{N}$  oder  $R \subset \mathbb{Z}$  heißt **dick**, wenn sie Intervalle  $[a_n, a_n + n]$  beliebiger Länge enthält.

*Bem.* Eine Menge ist genau dann syndetisch, wenn ihr Schnitt mit jeder dicken Menge nichtleer ist. Eine Menge ist genau dann dick, wenn ihr Schnitt mit jeder syndetischen Menge nichtleer ist.

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{N}$  oder  $A \subset \mathbb{Z}$  heißt **stückw. syndetisch**, wenn sie Schnitt einer dicken und einer syndetischen Menge ist.

**Thm.** Sei  $B \subset \mathbb{N}$  oder  $B \subset \mathbb{Z}$  stückw. syndetisch,  $B = B_1 \cup \dots \cup B_q$  eine Partition. Dann ist auch eine Menge  $B_i$  stückweise syndetisch.

*Bem.* Seien  $\tau_1, \dots, \tau_n$  die kanonischen Erzeuger von  $H_1(T^m) \cong \mathbb{Z}^n$ .

**Lem.** Habe  $T : T^d \rightarrow T^d$  die Form

$$T(\theta_1, \dots, \theta_d) := (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + f_1(\theta_1), \dots, \theta_d + f_{d-1}(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}))$$

mit  $\alpha$  irrational,  $f_i : T^i \rightarrow T^i$  stetig mit  $(f_i)_*(\tau_i) \neq 0$  für  $i = 1, \dots, d-1$ . Dann ist  $(T^d, T)$  ein minimales dynamisches System.

**Thm.** Sei  $p(X) \in \mathbb{R}[X]$  mit mind. einem irrationalen Koeffizienten. Dann gibt es  $\forall \epsilon > 0$  eine Lsg der Ungleichung  $|p(n) - m| < \epsilon$ .

**Def.** Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  stetig. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **wandernd**, wenn die Urbilder  $T^{-1}(A), \dots, T^{-n}(A), \dots$  disjunkt von  $A$  (und damit auch voneinander) sind.

**Def.** Ein dyn. System  $(X, T)$  heißt **nicht wandernd**, wenn keine offene, nichtleere Menge  $A \subset X$  wandernd ist.

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **nirgends dicht**, falls  $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$ .

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **mager**, wenn sie Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist.

**Thm.** Sei  $(X, T)$  nicht wandernd. Dann ist die Menge der nicht rekurrenten Punkte in  $X$  mager.

## 2. Van der Waerdens Theorem

**Lem.** Sei  $X$  ein komp. metr. Raum,  $T : X \rightarrow X$  stetig und  $A \subset X$ . Angenommen,  $\forall \epsilon > 0 : \forall x \in A : \exists y \in Y : \exists n \geq 1 : d(T^n y, x) < \epsilon$ . Dann  $\forall \epsilon > 0 : \exists z \in A : \exists n \geq 1 : d(T^n z, z) < \epsilon$ .

**Def.** Sei  $X$  ein komp. Raum,  $T : X \rightarrow X$  stetig.

Eine abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt **homogen** bzgl.  $T$ , wenn es eine Untergruppe  $G < \text{Aut}(X)$  gibt mit  $\forall S \in G : ST = TS$  und  $S(A) = A$ , sodass das dyn. System  $(A, G)$  minimal ist.

**Bsp.** Sei  $(X, T) = (Y \times K, T)$  eine Gruppenerweiterung von  $(Y, T)$ . Dann sind die Fasern  $\{(y_0, k) \mid k \in K\}$  für alle  $y_0 \in Y$  homogen.

**Def.** Eine abgeschl. Teilmenge  $A \subset X$  eines komp. metr. Raumes heißt **rekurrent** für eine Transformation  $T : X \rightarrow X$ , falls für alle  $\epsilon > 0$  und  $x \in A$  ein  $y \in A$  und  $n \geq 1$  existiert, sodass  $d(T^n y, x) < \epsilon$ .

**Lem.** Sei  $A \subset X$  homogen bzgl.  $T : X \rightarrow X$ . Angenommen,  $\forall \epsilon > 0 : \exists x, y \in A, n \geq 1 : d(T^n y, x) < \epsilon$ . Dann ist  $A$  rekurrent.

**Bsp.** Sei  $(X, T) = (Y \times K, T)$  eine Gruppenerw. von  $(Y, T)$  und  $y_0 \in Y$  rekurrent. Dann ist die Faser  $\{y_0\} \times K$  rekurrent.

**Lem.** Sei  $A \subset X$  homogen und rekurrent bzgl.  $T : X \rightarrow X$ . Dann enthält  $A$  einen rekurrenten Punkt von  $(X, T)$ .

**Thm** (Multiple Birkhoff Recurrence, **MBR**).

Sei  $X$  ein komp. metr. Raum und  $T_1, \dots, T_l : X \rightarrow X$  komm. stetige Abbildungen. Dann gibt es einen Punkt  $x \in X$  und eine Folge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $n_k \rightarrow \infty$  und  $T_i^{n_k} x \rightarrow x$  simultan für alle  $i = 1, \dots, l$  bei  $k \rightarrow \infty$ .

**Def.** Eine **arithmetische Progression** der Länge  $N \in \mathbb{N}$  ist eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{N}$  der Form  $A = \{a + ib \mid i = 0, \dots, N\}$  mit  $a \in \mathbb{N}, b \geq 1$ .

**Thm** (**Grünwald**). Sei  $\mathbb{N}^m = B_1 \cup \dots \cup B_q$  eine Partition von  $\mathbb{N}^m$ . Dann hat eine Menge  $B_j$  die Eigenschaft, dass für alle endl. Teilmengen  $F \subset \mathbb{N}^m$  ein  $a \in \mathbb{N}^m$  und ein  $b \in \mathbb{N}$  existiert mit  $bF + a \subset B_j$ .

*Bem.* Dieses Thm ist eine Verallgemeinerung auf  $> 1$  Dim. von:

**Thm** (**van der Waerden**). Sei  $\mathbb{N} = B_1 \cup \dots \cup B_q$  eine Partition. Dann enthält ein  $B_j$  arithmetische Progressionen beliebiger Länge.

### 3.1. Dynamische Systeme auf Maßräumen

*Bem.* Sei im Folgenden  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  ein Maßraum mit einem topol. Raum  $X$ , einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  auf  $X$  und einem endlichen normierten Maß  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  mit  $\mu(X) = 1$ .

**Notation.**  $L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \{\text{Äq'klassen } p\text{-integrierbarer Fktn } X \rightarrow \mathbb{R}\}$  heißt **Lebesgue-Raum** ( $1 \leq p < \infty$ ). Für  $p = \infty$  setze  $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) := \{\text{Äq'klassen wes. beschränkter Fktn } X \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Es werden dabei Fktn identifiziert, die fast-überall übereinstimmen.

*Bem.*  $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$  ist ein Banachraum für  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Notation.**  $E(f) := \int_X f \, d\mu$  für  $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

**Def.** Eine messbare Abbildung  $T : X \rightarrow X$  heißt **maßerhaltend**, wenn  $\forall B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \mu(T^{-1}B)$ . Das Tupel  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  heißt **maßerhaltendes System** (m. e. S.).

**Lem.**  $T$  ist maßerhaltend  $\iff \forall f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu) : E(f) = E(f \circ T)$

**Def.** Ein maßerh. System  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  heißt **ergodisch**, wenn

$$\forall B \in \mathcal{B} : T^{-1}B = B \implies \mu(B) \in \{0, \mu(X)\}.$$

Man sagt auch,  $T$  sei eine ergodische Transformation.

**Thm (Birkhoffscher Ergodensatz).**

Sei  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  ein m. e. S. und  $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Dann gilt

$$f_n(x) := \frac{1}{n+1} \cdot (f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^n x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x)$$

für fast-alles  $x \in X$ , wobei  $\bar{f}$   $T$ -invariant ist, d. h.  $\bar{f} = \bar{f} \circ T$ . Falls  $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$  mit  $1 \leq p < \infty$ , dann  $f_n \rightarrow \bar{f}$  in  $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

*Bem.* Es folgt  $E(f) = E(\bar{f})$ . Wenn  $T$  ergodisch ist, dann ist  $\bar{f}$  fast-überall konstant  $E(f)$ , also  $f_n(x) \rightarrow E(f)$  für fast-alles  $x \in X$ .

**Thm (Poincaré).** Sei  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  ein m. e. S. und  $A \in \mathcal{B}$  mit  $\mu(A) > 0$ . Dann gibt es ein  $n \geq 1$  mit  $\mu(A \cap T^{-n}A) > 0$ .

**Beweis.** Sei  $f = \mathbb{1}_A$  die Indikatorfunktion von  $A$ . Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gilt

$$\int f(T^n x) f(T^m x) \, d\mu(x) = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

Es folgt durch  $2 \times$  Übergang zum Grenzwert  $E(\bar{f}^2) = 0$ , also

$$0 = E(\bar{f}^2) = E(f) = \mu(A) > 0 \quad \zeta$$

**Thm.** Sei  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  ein m. e. S., wobei  $X$  ein separabler metrischer Raum ist, dessen offenen Mengen messbar sind. Dann sind fast-alles Punkte in  $X$  rekurrent.

### Etwas Maßtheorie & Funktionalanalysis

**Def.** Sei  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Ein **topologischer  $k$ -Vektorraum**  $V$  ist ein  $k$ -VR mit einer Topologie bzgl. der die Addition  $+ : V \times V \rightarrow V$  und die Skalarmultiplikation  $\cdot : k \times V \rightarrow V$  stetig sind.

**Def.** Sei  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V$  ein  $k$ -VR. Eine Teilmenge  $A \subset V$  heißt

- **absorbierend**, wenn  $\forall v \in V : \exists r > 0 : \forall \alpha \in k : |\alpha| < r \implies \alpha v \in A$ .
- **ausgewogen**, wenn  $\forall v \in A : \forall \alpha \in k : |\alpha| \leq 1 \implies \alpha v \in A$ .
- **absolutkonvex**, wenn  $A$  ausgewogen und konvex ist.

**Lem.** Eine Teilmenge  $A \subset V$  ist genau dann absolutkonvex, wenn

$$\forall v, w \in A : \forall \lambda, \mu \in k : |\lambda| + |\mu| \leq 1 \implies \lambda v + \mu w \in A.$$

**Def.** Ein topol.  $k$ -VR  $V$  heißt **lokalkonvex**, wenn jede Umgebung von  $0 \in V$  eine offene, absorbierende, absolutkonv. Teilmenge besitzt.

**Bsp.** Normierte Räume sind lokalkonvex.

**Def.** Sei  $V$  ein  $k$ -VR,  $K \subset V$  konvex. Ein Punkt  $x \in K$  heißt **Extremalpunkt**, wenn

$$\forall \lambda, \mu \in \overline{B_1(0)} \subset k, y, z \in V : \lambda + \mu = 1 \wedge \lambda y + \mu z = x \implies x = y = z.$$

**Lem.** Sei  $V$  ein topol. VR,  $A \subset V$ . Ist  $A$  konvex, dann auch  $\bar{A}$ .

**Satz (Krein-Milman).** Sei  $V$  ein lokalkonvexer Raum,  $K \subset V$  kompakt und konvex. Dann ist  $K$  gleich dem Abschluss der von den Extremalpunkten von  $K$  aufgespannten konvexen Hülle.

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Ein Maß  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{B})$  heißt

- **von innen regulär**, wenn für alle  $A \in \mathcal{B}$  gilt:  
$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq A \text{ kompakt und messbar, } F \subseteq A\}.$$
- **von außen regulär**, wenn für alle  $A \in \mathcal{B}$  gilt:  
$$\mu(A) = \inf\{\mu(F) \mid F \subseteq X \text{ offen und messbar, } F \supseteq A\}.$$
- **regulär**, wenn es von innen und außen regulär ist.

**Def.** Ein topol. Raum  $X$  heißt  **$\sigma$ -kompakt**, wenn  $X$  Vereinigung höchstens abzählbar vieler kompakter Teilmengen ist.

**Thm (Riesz).** Sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum, dessen offene Teilmengen  $\sigma$ -kompakt sind,  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra von  $X$ ,

$$\begin{aligned} C_0(X) &:= \{\text{stetige Funktionen } X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit kompaktem Träger}\}, \\ \mathcal{L} &:= \{\text{lineare Funktionale } L : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{L}' &:= \{L \in \mathcal{L} \mid \forall f \in C_0(X) : f \geq 0 \implies L(f) \geq 0\} \\ \mathcal{M}' &:= \{\text{reguläre Maße } \mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty] \text{ auf } (X, \mathcal{B}) \text{ mit} \\ &\quad \mu(K) < \infty \text{ für alle kompakten } K \subset X\} \end{aligned}$$

Dann ist folgende Abbildung eine Bijektion:

$$R : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{L}', \quad \mu \mapsto \left( L_\mu : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_X f \, d\mu \right)$$

**Thm.** Sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum, dessen offene Teilmengen  $\sigma$ -kompakt sind. Sei  $\mu$  ein Maß auf der Borel- $\sigma$ -Algebra von  $X$  mit  $\mu(K) < \infty$  für alle kompakten  $K \subset X$ . Dann ist  $\mu$  regulär.

**Def.** Seien  $\mu$  und  $\nu$  Maße auf dem messbaren Raum  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Dann heißt  $\nu$  heißt **absolut stetig** bezüglich  $\mu$  (notiert  $\nu \ll \mu$ ), falls

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

**Def.** Ein Maß  $\mu$  auf einem messb. Raum  $(\Omega, \mathfrak{A})$  heißt  **$\sigma$ -endlich**, wenn es eine Folge  $(A_n)$  in  $\mathfrak{A}$  mit  $\mu(A_n) < \infty$  und  $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  gibt.

**Thm (Radon-Nikodým).** Seien  $\mu$  und  $\nu$  Maße auf dem messbaren Raum  $(\Omega, \mathfrak{A})$ ,  $\mu$   $\sigma$ -endlich und  $\nu$  absolut stetig bzgl.  $\mu$  ( $\nu \ll \mu$ ). Dann gibt es eine fast-überall eindeutige messb. Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Ist  $\nu$  endlich, so ist  $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ .

**Def.** Sei  $X$  ein topol. Raum,  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra. Ein Maß  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{B})$  heißt **Borelmaß**, wenn für alle  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  existiert mit  $\mu(U) < \infty$ .

*Bem.* Falls  $X$  lokalkompakt ist, dann ist  $\mu$  genau dann ein Borelmaß, wenn  $\mu(K) < \infty$  für alle Kompakta  $K \subseteq X$ .

**Def.** Ein **Haar-Maß** auf einer topol. Gr.  $G$  ist ein reguläres Borelmaß auf  $(G, \mathcal{B})$ , das linksinv. ist, d. h.  $\forall g \in G, B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \mu(gB)$ .

**Thm.** Sei  $G$  eine lokalkompakte topol. Gruppe. Dann gibt es bis auf multiplikative Konstante genau ein nichttriviales Haar-Maß.

### 3.2 Invariante Maße auf komp. Räumen

*Bem.* Sei im Folgenden  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $X$  und  $T : X \rightarrow X$  stetig.

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  ein messbarer Raum und  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine messbare Abbildung, dann ist

$$\mu' = f_*\mu = \mu \circ f^{-1} : \mathfrak{A}' \rightarrow [0, \infty], \quad A' \mapsto \mu(f^{-1}(A'))$$

ein Maß auf  $(\Omega', \mathfrak{A}')$ , genannt das **Bildmaß** von  $f$ .

**Def.** Setze  $\mathcal{M} := \{\text{Maße } \mu \text{ auf } (X, \mathcal{B}) \text{ mit } \mu(X) = 1\}$ . Sei  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  die Menge der Maße  $\mu$ , die unter  $T$  **invariant** sind, d. h.  $T_*\mu = \mu$ .

**Kor.** Die Abb.  $R$  aus dem Satz von Riesz liefert eine Bij.

$$\mathcal{M} \xrightarrow{1:1} \{L \in \mathcal{L}' \mid L(x \mapsto 1) = 1\}$$

*Bem.* Man kann  $\mathcal{M}$  also als Teilmenge von  $\mathcal{L}$  auffassen. Wenn  $\mathcal{L}'$  die Schwach-\*Topologie trägt, dann trägt  $\mathcal{M}$  die Teilmengentopol. mit

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \text{ in } \mathcal{M} \iff \forall f \in C_0(X) : \int f \, d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu.$$

Mit dieser Topologie ist  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}'$  kompakt und konvex.

*Bem.* Die Menge  $\mathcal{S}$  ist nicht leer: Sei  $\nu \in \mathcal{M}$  beliebig. Setze

$$\mu_n := \frac{1}{n+1} (\nu + T_*\nu + T_*^2\nu + \dots + T_*^n\nu).$$

Der Grenzwert von  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{M}$  ist dann in  $\mathcal{S}$ .

*Bem.*  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  ist kompakt und konvex. Aus dem Satz von Krein-Milman folgt:  $\mathcal{S}$  ist der Abschluss der konvexen Hülle seiner Extrempunkte (die insb. existieren). Diese sind wie folgt charakterisiert:

**Prop.** Ein Maß  $\mu \in \mathcal{S}$  ist genau dann ein Extrempunkt von  $\mathcal{S}$ , wenn  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  ein ergodisches System ist.

*Bem.* Folglich heißen Extrempunkte von  $\mathcal{S}$  **ergodische Maße**.

**Def.** Das dynamische System  $(X, T)$  heißt **eindeutig ergodisch**, wenn es genau ein invariantes Maß  $\mu \in \mathcal{S}$  gibt.

*Bem.* Aus der Prop. folgt, dass dieses eind. Maß dann ergodisch ist.

**Thm.** Sei  $(X, T)$  ein eind. ergodisches System,  $\mu \in \mathcal{S}$  das  $T$ -inv. Maß. Dann gilt für alle  $f \in \mathcal{C}(X)$ :  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$  glm. in  $X$ .

**Def.** Sei  $X$  ein separabler metrischer Raum,  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra. Der **Träger** eines Maßes auf  $(X, \mathcal{B})$  ist das Komplement aller offenen Mengen mit Maß Null.

*Bem.* Der Träger eines  $T$ -invarianten Maßes ist  $T$ -invariant.

**Prop.** Sei  $T$  eindeutig ergodisch auf  $X$  ist und  $X' \subset X$  der Träger des inv. Maßes. Dann ist  $(X', T)$  minimal.

**Def.**  $x_0 \in X$  heißt **generischer Pkt** des m. e. S.  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , wenn

$$\forall f \in \mathcal{C}(X) : f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

**Prop.** Sei  $\mu$  ein ergodisches Maß auf  $(X, T)$ . Dann sind  $\mu$ -fast-alle Punkte von  $X$  generische Punkte von  $\mu$ .

**Prop.** Das System  $(X, T)$  ist eindeutig ergodisch, wenn jeder Punkt  $x \in X$  generisch für ein inv. Maß  $\mu_x \in \mathcal{S}$  ist.

**Def.** Sei  $\mu$  ein invariantes Maß von  $(X, T)$ . Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt **quasi-generischer Punkt** von  $\mu$ , falls Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen existieren mit  $a_k \leq b_k$ ,  $b_k - a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  und

$$\forall f \in \mathcal{C}(X) : \frac{1}{b_k - a_k + 1} \sum_{n=a_k}^{b_k} f(T^n x_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

**Prop.** Sei  $(X, T)$  ein zykl. System,  $x_0 \in X$  und  $X' := \overline{\{T^n x_0 \mid n \geq 0\}}$ . Wenn  $\mu \in \mathcal{M}(X')$  ein ergodisches Maß bzgl.  $T_{X'}$  ist, dann ist  $x_0$  quasi-generisch für  $\mu$ .

### 3.3. Gruppenerweiterungen, eindeutige Ergodizität und Gleichverteilung

**Def.** Sei  $(Y, T)$  ein dyn. System,  $\nu$  ein  $T$ -inv. Maß auf  $(Y, \mathcal{B})$ ,  $G$  eine kompakte Gruppe und  $\phi : Y \rightarrow G$  stetig. Sei  $\mu_G$  ein Haar-Maß auf  $G$ . Dann ist das Produktmaß  $\nu \times \mu_G$  ein inv. Maß auf der Gruppenerweiterung  $(Y \times G, T)$ , es ist also  $(Y \times G, \mathcal{B}_{Y \times G}, \nu \times \mu_G, T)$  ein m. e. S.

**Prop.** Sei  $(Y, T)$  eind. ergodisch und  $(Y \times G, \mathcal{B}_{Y \times G}, \nu \times \mu_G, T)$  ergodisch. Dann ist auch  $(Y \times G, T)$  eindeutig ergodisch.

**Prop.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  irrational und  $(b_{ij})_{1 \leq j < i \leq d}$  ganze Zahlen mit  $b_{j+1j} \neq 0$  für  $d > j \geq 1$  und  $T : T^d \rightarrow T^d$  definiert durch

$$T(\theta_1, \dots, \theta_d) := (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + b_{21}\theta_1, \dots, \theta_d + b_{d1}\theta_1 + \dots + b_{d,d-1}\theta_{d-1}).$$

Dann ist  $(T^d, T)$  eind. ergodisch bzgl. dem Haar-Maß auf  $T^d$ .

**Def.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen,  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto e^{2i\pi z}$  und  $\mu$  das Haar-Maß auf  $S^1$ . Die Folge heißt **gleichverteilt modulo 1**, falls für alle offenen  $U \subset S^1$  gilt:

$$\frac{|U \cap \{p(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}|}{|n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(U)}{\mu(S^1)}.$$

**Lem.** Die Folge  $(x_n)$  ist genau dann gleichverteilt, wenn

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(p(x_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(S^1)} \int_{S^1} f d\mu \quad \forall \text{ stetige } f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Def.** Die Folge  $(x_n)$  heißt **wohlverteilt modulo 1**, wenn

$$\frac{|U \cap \{p(x_i) \mid i = 1 + M, \dots, n + M\}|}{|n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(U)}{\mu(S^1)}.$$

gleichmäßig für alle  $M \in \mathbb{N}$  gilt.

**Thm (Weyl).** Sei  $p(X) \in \mathbb{R}[X]$  ein Polynom mit mind. einem irrationalen Koeffizienten, der nicht der konstante Term ist. Dann ist die Folge  $(p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  wohlverteilt modulo 1.

### 3.4. Unitäre Op'en und Poincaré-Folgen

**Def.** Ein  $\mathbb{C}$ -VR mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt Prähilbertraum. Er heißt **Hilbertraum**, wenn er vollständig bzgl. der ind. Norm ist.

**Def.** Ein **linearer beschränkter Operator** auf einem Hilbertraum  $H$  ist eine lineare Abbildung  $T : H \rightarrow H$  mit

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$$

**Notation.**  $\mathcal{B}(H) := \{\text{lineare, beschränkte Operatoren auf } H\}$

**Thm.** Für jeden Operator  $T \in \mathcal{B}(H)$  gibt es genau ein  $T^* \in \mathcal{B}(H)$  mit

$$\forall x, y \in H : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

**Def.** Der Operator  $T^*$  heißt **adjungierter Operator** von  $T$ .

**Def.** Sei  $H$  ein Hilbertraum. Ein Operator  $T \in \mathcal{B}(H)$  heißt

- **normal**, wenn  $T^*T = TT^*$ ,
- **unitär**, wenn  $T^*T = TT^* = \text{Id}_H$ .

**Def.** Sei  $(X, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum,  $H$  ein reeller oder komplexer Hilbertraum. Sei  $P(H) \subset \mathcal{B}(H)$  die Menge der orth. Projektionen. Ein **Spektralmaß** für  $(X, \mathfrak{A}, H)$  ist eine Abbildung  $E : \mathfrak{A} \rightarrow P(H)$  mit  $E(X) = \text{Id}_H$  und folgender Eigenschaft: Für alle  $x, y \in H$  ist

$$E_{x,y} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, y \rangle.$$

ein komplexes bzw. signiertes Maß auf  $(X, \mathfrak{A})$ .

*Bem.* Sei  $E$  ein Spektralmaß auf  $(X, \mathfrak{A}, H)$ . Dann gilt  $\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{A}$ :

- $E(\emptyset) = 0$
- $E(\Omega_1 \cup \Omega_2) + E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$  (Modularität)
- $E(\Omega_1)E(\Omega_2) = E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_2)E(\Omega_1)$  (Multiplikativität)

*Bem.* Für alle  $x \in H$  ist  $E_{x,x}$  ein positives Maß:

$$E_{x,x}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x \rangle = \langle E(\Omega)E(\Omega)x, x \rangle = \langle E(\Omega)x, E(\Omega)x \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

**Prop.** Sei  $E$  ein Spektralmaß auf  $(X, \mathfrak{A}, H)$  und  $x \in H$ . Dann ist  $\Omega \mapsto E(\Omega)x$  ein  $\sigma$ -additives  $H$ -wertiges Maß auf  $(X, \mathfrak{A})$ .

**Def.** Sei  $E$  ein Spektralmaß auf  $(X, \mathfrak{A}, H)$ . Es gibt für jede  $\mathfrak{A}$ -messb. Fkt  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  eine max. offene Menge  $V \subset \mathbb{K}$  mit  $E(f^{-1}(V)) = 0$ . Die Funktion  $f$  heißt **wesentlich beschränkt**, wenn

$$\|f\|_{\infty} := \text{ess sup}|f| := \sup\{|x| \mid x \in \mathbb{K} \setminus V\} < \infty.$$

Dann ist  $B := \{\text{beschränkte, } \mathfrak{A}\text{-messb. Fkt } X \rightarrow \mathbb{K}\}$  mit Norm  $\|\cdot\|_{\infty}$  eine Banachalgebra und  $N := \{f \in B \mid \|f\|_{\infty} = 0\}$  ein Ideal in  $B$ . Dann ist auch  $L^{\infty}(E) := B/N$  mit Norm  $\|\cdot\|_{\infty}$  eine Banachalgebra.

**Thm.** Sei  $E$  ein Spektralmaß auf  $(X, \mathfrak{A}, H)$ . Dann gibt es genau einen injektiven, isom. Homomorphismus  $\Psi : L^{\infty}(E) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  von Algebren mit  $\forall f \in L^{\infty}(E) : \Psi(\bar{f}) = (\Psi(f))^*$  und

$$\forall x, y \in H \quad f \in L^{\infty}(E) : \langle \Psi x, y \rangle = \int_X f dE_{x,y}.$$

**Notation.**  $\int_X f dE := \Psi(f)$

**Def.** Sei  $X$  ein Banachraum,  $\mathcal{B}(X)$  die Menge der beschränkten Operatoren auf  $X$ . Das **Spektrum** eines Operators  $T \in \mathcal{B}(X)$  ist

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda \cdot \text{Id}_X \text{ ist nicht invertierbar}\}.$$

**Thm (Spektralsatz).** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  ein normaler Operator und  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $\sigma(T)$ . Dann gibt es genau ein Spektralmaß  $E$  auf  $(\sigma(T), \mathcal{B}, H)$  mit

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \text{id}_{\sigma(T)} dE.$$

Außerdem gilt für alle  $S \in \mathcal{B}(H)$  mit  $T \circ S = S \circ T$ :

$$\forall \Omega \in \mathcal{B} : E(\Omega) \circ S = S \circ E(\Omega).$$

Das Spektralmaß  $E$  wird auch **Spektralzerlegung** von  $T$  genannt.

**Thm.** Sei  $X$  ein komplexer Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(X)$  normal. Es gilt:



- $T$  ist unitär  $\iff \sigma(T) \subseteq \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\}$ .
- $T$  ist selbstadjungiert  $\iff \sigma(T) \subseteq \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Thm.** Sei  $E$  die Spektralzerlegung eines normalen Operators  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  und  $E_0 := E(\{\lambda_0\})$ . Dann gilt:

- $\{\text{EVEN von } T \text{ zu } \lambda_0\} = \ker(T - \lambda_0 \text{Id}_H) = \{x \in H \mid E_0(x) = x\}$
- $\lambda_0$  ist EW von  $T \iff E_0 \neq 0$ .
- Jeder isolierte Punkt von  $\sigma(T)$  ist ein EW von  $T$ .

**Lem.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  ein unitärer Operator,  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$  ein Polynom mit  $\forall n \in \mathbb{Z} : p(n) \in \mathbb{Z}$ . Setze

$$H_\theta := \{x \in H \mid Tx = e^{2\pi i \theta} x\} \quad \text{für } \theta \in [0, 1),$$

$$H_{\text{rat}} := \bigoplus_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} H_q.$$

Sei  $P_{\text{rat}} : H \rightarrow H_{\text{rat}}$  die orth. Projektion. Wenn  $P_{\text{rat}}x = 0$ , dann

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N T^{p(n)} x \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

**Prop.** Sei  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$  mit  $\forall n \in \mathbb{Z} : p(n) \in \mathbb{Z}$  und  $p(0) = 0$ . Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  ein unitärer Operator auf einem Hilbertraum  $H$  und  $x \in H$  mit  $\langle T^{p(n)}x, x \rangle = 0$  für alle  $n \geq 1$ . Dann ist  $x$  orthogonal zu allen Eigenvektoren deren zugeh. Eigenwert eine Einheitswurzel ist.

**Def.** Eine Teilmenge  $W \subset \mathbb{Z}$  heißt **Poincaré-Folge**, wenn für alle maßerhaltenden Systeme  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  und  $A \in \mathcal{B}$  mit  $\mu(A) > 0$  gilt:

$$\exists n \in W \setminus \{0\} : \mu(T^{-n}A \cap A) > 0.$$

**Bsp.** Dicke Mengen sind Poincaré-Folgen.

**Thm.** Sei  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$  mit  $\forall n \in \mathbb{Z} : p(n) \in \mathbb{Z}$  und  $p(0) = 0$ . Dann ist  $\{p(n) \mid n \geq 1\}$  eine Poincaré-Folge.

*Bem.* Ist  $W \subset \mathbb{Z}$  eine Poincaré-Folge, dann ist  $(W \cap m\mathbb{Z}) \setminus \{0\} \neq \emptyset$  für  $m \geq 1$ . Denn: Ist  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  ein m.e.S., dann auch  $(X, \mathcal{B}, \mu, T^m)$ .

### 3.5. Invariante Maße auf symb. Flüssen

*Bem.* Sei im Folgenden  $\Lambda$  ein endliches Alphabet und  $T : \Lambda^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Lambda^{\mathbb{Z}}$  der Verschiebeoperator.

**Def.** Sei  $S \subset \mathbb{N}$  bzw.  $S \subset \mathbb{Z}$ . Die **obere Banach-Dichte** von  $S$  ist

$$BD^*(S) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \max_{m \in \mathbb{Z}} |S \cap [m, m+n]|.$$

**Def.** Man sagt, ein Symbol  $a \in \Lambda$  trete in  $\xi \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$  mit positiver oberer Banach-Dichte auf, wenn  $BD^*(\xi^{-1}(a)) > 0$ .

**Lem.** Sei  $\xi \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$  und  $X := \overline{\{T^n \xi \mid n \in \mathbb{Z}\}}$  dessen abgeschl. Orbit. Sei  $a \in \Lambda$  ein Symbol und  $A(a) := \{\omega \in X \mid \omega(0) = a\}$ . Dann tritt  $a$  genau dann mit positiver Banach-Dichte in  $\xi$  auf, wenn ein  $T$ -inv. Maß  $\mu$  auf  $X$  mit  $\mu(A(a)) > 0$  existiert.

**Notation.**  $S_{\text{diff}} := \{x - y \mid x, y \in S\}$  für  $S \subset \mathbb{Z}$ .

**Thm.** Sei  $W \subset \mathbb{Z}$  eine Poincaré-Folge und habe  $S \subset \mathbb{Z}$  positive obere Banach-Dichte. Dann gilt  $W \cap S_{\text{diff}} \setminus \{0\} \neq \emptyset$ .

**Kor.**  $S_{\text{diff}}$  ist syndetisch.

*Bem.* Man kann zeigen: Wenn  $S_1, \dots, S_k \subset \mathbb{Z}$  alle positive obere Banach-Dichte besitzen, dann ist  $S_{1, \text{diff}} \cap \dots \cap S_{k, \text{diff}}$  syndetisch.

**Thm (Sárközy).** Habe  $S \subset \mathbb{Z}$  positive obere Banach-Dichte, sei  $p[X] \in \mathbb{Q}[X]$  mit  $\forall n \in \mathbb{Z} : p(n) \in \mathbb{Z}$  und  $0 \in p(\mathbb{Z})$ . Dann existiert eine Lsg der Gleichung  $x - y = p(z)$  in Variablen  $x, y \in S$ ,  $x \neq y$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ .

### 4.3. Von Neumannscher Ergodensatz und generische Maße

**Def.** Sei  $H$  ein Hilbertraum. Eine Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Operatoren in  $\mathcal{B}(H)$  konvergiert gegen  $T \in \mathcal{B}(H)$

- in der **schwachen Operatorortopologie** (WOT), wenn

$$\forall x, y \in H : \langle T_n x, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle T x, y \rangle.$$

- in der **starken Operatorortopologie** (SOT), wenn

$$\forall x \in H : T_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T x.$$

**Thm.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  unitär,  $H_T := \{x \in H \mid Tx = x\}$ . Sei  $P_T : H \rightarrow H$  die orth. Projektion auf  $H_T$ . Dann konvergiert

$$\frac{1}{n+1} (\text{Id} + T + T^2 + \dots + T^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_T \quad \text{in der starken Operatorortopol.}$$

*Bem.* Sei  $T$  eine maßerh. Transformation auf einem Maßraum  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ . Dann induziert  $T$  einen unitären Operator  $T$  auf dem Hilbertraum  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  durch  $T(f) := f \circ T$ . Aus dem Theorem folgt, dass für jede Funktion  $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  die Folge der ergodischen Mittel  $f_n$  in  $L^2$  gegen  $P_T f$  konvergiert.

**Def.** Sei  $\nu$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{B})$  und  $\mathfrak{A}$  eine Algebra von beschränkten  $\mathcal{B}$ -messbaren Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$ , die abgeschlossen unter komplexer Konjugation ist. Das Maß  $\nu$  heißt **generisches Maß** von  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  bzgl.  $\mathfrak{A}$ , wenn für alle  $f \in \mathfrak{A}$  gilt:

$$\int_X f_n d\nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

*Bem.* Aus dem Ergodensatz folgt:  $\mu$  ist selbst ein generisches Maß von  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  bzgl.  $\mathfrak{A} := \{\text{beschränkte } \mathcal{B}\text{-messb. Fktn } X \rightarrow \mathbb{C}\}$ .

*Bem.* Sei  $X$  ein komp. metr. Raum und  $T : X \rightarrow X$  stetig. Sei  $x_0$  ein generischer Punkt eines Maßes  $\mu$  auf  $X$ . Dann ist das Punktmaß  $\delta_{x_0}$  ein generisches Maß von  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  bzgl.  $\mathfrak{A} := \mathcal{C}(X)$ .

*Bem.* Angenommen, es gibt eine Teilmenge  $B \subset \mathfrak{A}$  von  $T$ -inv. Fktn, die dicht in  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)_T := \{f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \mid f = f \circ T\}$  liegt. Es gilt

$$\forall f \in B : \int_X |f|^2 d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \int_X T^N |f|^2 d\nu = \int_X |f|^2 d\nu.$$

Man kann also eine dichte Teilmenge von  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)_T$  isometrisch mit einer Teilmenge in  $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$  identifizieren und so  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$  als Teilmenge von  $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$  auffassen.

**Thm.** Sei  $\nu$  ein generisches Maß von  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  bzgl.  $\mathfrak{A}$ . Enthalte  $\mathfrak{A}$  eine Teilmenge von  $T$ -invarianten Funktionen, die dicht in  $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)_T$  liegt. Dann gilt

$$\forall f \in \mathfrak{A} : \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N T^n f \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P_T f \quad \text{in } L^2(X, \mathcal{B}, \nu).$$

### 4.4. Satz von Roth

**Thm (Szemerédi).** Habe  $S \subset \mathbb{Z}$  positive obere Banachdichte. Dann enthält  $S$  arithmetische Progressionen beliebiger Länge.

**Prop** (Multiple Poincaré-Recurrenz, MPR). Sei  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  ein W-Raum und  $T_1, \dots, T_l : X \rightarrow X$  kommutierende maßerhaltende Abbildungen. Dann gibt es für alle  $A \in \mathcal{B}$  mit  $\mu(A) > 0$  ein  $n \geq 1$  mit

$$\mu(A \cap T_1^{-n} \cap \dots \cap T_l^{-n}) > 0.$$

**Lem.** Angenommen, MPR gilt für alle erg. m. e. S.  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  im Spezialfall  $T_1 = T, T_2 = T^2, \dots, T_l = T^l$  mit  $l \in \mathbb{N}$  fest.

Habe  $S \subset \mathbb{Z}$  positive obere Banachdichte.

Dann enthält  $S$  arithmetische Progressionen der Länge  $l$ .

**Thm.** Sei  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  ein ergodisches m. e. S.,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  beschränkt und messbar mit  $\int f d\mu > 0$ . Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \int f(x) f(T^n x) f(T^{2n} x) d\mu(x) > 0.$$

**Kor.** MPR gilt für alle ergodischen m. e. S.  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  im Spezialfall  $T_1 = T, T_2 = T^2$ .

**Kor (Satz von Roth).** Habe  $S \subset \mathbb{Z}$  positive obere Banachdichte. Dann enthält  $S$  arithmetische der Länge 2.