Zusammenfassung Lineare Algebra II

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Notation. Sofern nicht anders angegeben, bezeichne K im folgenden einen beliebigen Körper, V einen (möglicherweise unendlichdim.) K-Vektorraum und f einen Endomorphismus $V \to V$.

Def. Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen zueinander **ähnlich**, falls es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt mit $B = SAS^{-1}$.

Bem. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$.

Def. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$

- ist in **Diagonalform**, wenn A nur auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge besitzt.
- ist in **Triagonalform**, wenn A nur auf und oberhalb der Diagonalen von Null verschiedene Einträge besitzt.
- heißt **diagonalisierbar** bzw. **triagonalisierbar**, wenn A ähnlich zu einer Diagonal- bzw. Triagonalmatrix ist.

Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar** bzw. **triagonalisierbar**, wenn es eine Basis von V gibt, sodass die darstellende Matrix von f bzgl. dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

Satz. Es sei $A \in K^{n\times n}$. Dann ist A als Matrix genau dann diagonalisierbar (triagonalisierbar), wenn der durch A beschriebene Endomorphismus $K^n \to K^n$ diagonalisierbar (triagonalisierbar) ist.

Def. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Falls es ein $\lambda \in K$ und einen Vektor $v \in V\backslash\{0\}$ gibt, sodass $f(v) = \lambda v$, so heißt λ **Eigenwert** von f zum **Eigenvektor** v.

Satz. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Dann ist diese Familie linear unabhängig.

Def. Ist $\lambda \in K$, so setzen wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}(f;\lambda) &:= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}\\ &= \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V).\end{aligned}$$

Dies ist der zu λ gehörende **Eigenraum**, ein UVR von V.

Satz. Sei V endlichdim. und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Dann ist f genau dann diagonalisierbar, wenn

$$\dim \mathrm{Eig}(f;\lambda_1) + ... + \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda_k) = \dim V.$$

Satz. $\lambda \in K$ ist ein EW von $f \iff \det(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$.

Def. Sei $A \in K^{n\times n}$. Das Polynom $P_A(X) = \chi_A(X) := \det(A - X \cdot E_n) \in K[X]$ heißt **charakteristisches Polynom** von A. Für die darstellende Matrix A von f bzgl. einer beliebigen Basis von V setzen wir

$$P_f(X) := P_A(X) \in K[X].$$

Dieses Polynom ist von der gewählten Basis von V unabhängig.

Satz. $\lambda \in K$ ist ein EW von $f \iff \lambda$ ist Nullstelle von $P_f \in K[X]$

Verfahren (Bestimmung von Eigenwerten und Eigenräumen)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine (darstellende) Matrix

1. Berechne das charakteristische Polynom P_A und bestimme dessen Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_k$.
2. Für jedes λ_i, berechne $\ker(A - \lambda_i \cdot E_n)$ mit dem Gauß-Verfahren.

Def. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Dann heißt

$$\mathrm{spur}(A) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \in K \qquad \textbf{Spur} \text{ von } A.$$

Satz. Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gilt $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$.

Kor. Ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur.

Satz. Für diagonalisierbare $f \in \mathrm{End}(V)$ zerfällt P_f in Linearfaktoren. Zerfalle umgekehrt P_f in Linearfaktoren, wobei jede Nullstelle nur mit Vielfachheit 1 auftrete. Dann ist f diagonalisierbar.

Def. Sei λ ein EW von f.

- Dann heißt die Ordnung der Nullstelle λ von P_f **algebraische Vielfachheit** von λ (wird bezeichnet mit $\mu(f;\lambda)$).
- Die Dimension $d(f;\lambda) := \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda)$ heißt **geometrische Vielfachheit** von λ.

Satz. Für alle EW $\lambda \in K$ von f gilt

$$1 \le \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda) \le \mu(P_f;\lambda).$$

Def. Der **Jordanblock** der Größe n zum EW λ ist die Matrix

$$J(\lambda, n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Bem. Es gilt $P_{J(\lambda,n)} = (\lambda - X)^n$ aber nur $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \langle e_1 \rangle$.

Satz. Es sind äquivalent:

- f ist diagonalisierbar
- P_f zerfällt in Linearfaktoren und für alle Nullstellen λ von P_f gilt $\mu(f;\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(f;\lambda)$.
- Sind $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von f, so gilt

$$V = \mathrm{Eig}(f;\lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(f;\lambda_k).$$

Verfahren (Ist ein gegebener Endomorphismus diagonalisierbar?)**.**
1. Berechne das charakteristische Polynom, falls dieses nicht in Linearfaktoren zerfällt, so ist f nicht diagonaliserbar.
2. Falls das char. Polynom in Linearfaktoren zerfällt, so berechne für jede Nullstelle den Eigenraum. Wenn für eine Nullstelle algebraische und geometrische Dimension nicht übereinstimmen, so ist f nicht diagonaliserbar.

Satz. P_f zerfällt in Linearfaktoren $\iff$ f ist trigonalisierbar

Kor. Jeder Endomorphismus eines endlichdim. $\mathbb{C}$-VR ist trigonalisierbar (Fundamentalsatz der Algebra).

Satz (Cayley-Hamilton)**.** Sei V endlichdim. und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $P_f(X) \in K[X]$. Dann gilt $P_f(f) = 0$.

Def. Sei $\lambda \in K$ ein EW von f mit alg. Vielfachheit $\mu := \mu(P_f, \lambda)$. Dann heißt

$$\mathrm{VEig}(f, \lambda) := \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^\mu$$

der **verallgemeinerte Eigenraum** zum EW λ.

Satz. Es zerfalle P_f in Linearfaktoren, also

$$P_f = \pm(X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot ... \cdot (X - \lambda_k)^{\mu_k}.$$

Dann gilt

$$V = \mathrm{VEig}(f, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{VEig}(f, \lambda_k).$$

Notation. Es bezeichne R einen kommutativen Ring mit 1.

Def. Eine Teilmenge $I \subset R$ heißt **Ideal**, falls I eine additive Untergruppe von R ist und ür alle $r \in R$ und $x \in I$ gilt, dass $r \cdot x \in I$.

Def. Ist $S \subset R$ eine Teilmenge, so ist die Menge

$$\{r_1 s_1 + ... + r_k s_k \mid k \ge 0, s_1, ..., s_k \in S, r_1, ..., r_k \in R\}$$

ein Ideal in R und wird **von S erzeugtes Ideal** genannt.

Def. Ein Ideal $I \subset R$ heißt **Hauptideal**, falls I von einem einzigen Element erzeugt wird. Ein Ring, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt **Hauptidealring**.

Satz. Für jeden Körper K ist $K[X]$ ein Hauptidealring.

Satz. Es sei R ein Hauptidealring und $a_1, ..., a_k \in R$. Dann existiert ein ggT von $a_1, ..., a_k$.

Satz (Jordan-Chevalley-Zerlegung)**.** Sei V endlichdim. und zerfalle P_f in Linearfaktoren. Dann gibt es einen diagonalisierbaren Endomorphismus $D : V \to V$ und einen nilpotenten Endomorphismus $N : V \to V$ mit

- $f = N + D$
- $D \circ N = N \circ D$

Verfahren. Berechne die erweiterten Eigenräume, triagonalisiere jeweils f eingeschränkt auf den erweiterten Eigenraum, und pack sie in eine Matrix.

Satz. Zerfalle P_f in Linearfaktoren. Für alle EW $\lambda_1, ..., \lambda_k$ gilt dann:

$$\dim \mathrm{VEig}(f, \lambda_i) = \mu(f, \lambda_i).$$

Satz (Normalform nilpotenter Matrizen)**.** Sei $N \in K^{n\times n}$ nilpotent. Dann ist N ähnlich zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} J(0, n_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J(0, n_2) & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & J(0, n_r) \end{pmatrix}$$

Satz (Jordansche Normalform)**.** Sei V endlichdim. und zerfalle P_f in Linearfaktoren. Dann gibt es eine Basis von V, sodass die darstellende Matrix von f folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2, m_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_q, m_q) \end{pmatrix}$$

Dabei sind $m_1, ..., m_q \in \mathbb{N}$ mit $m_1 + ... + m_q = \dim V$ und $\lambda_1, ..., \lambda_q$ EWe von f (mit Vielfachheiten).

Verfahren (JNF)**.** 1. Berechne das charakteristische Polynom der Matrix / des Endomorphismus.

2. Führe für jeden Eigenwert λ_i folgende Schritte durch:
   (a) Berechne $\ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^l$ für $l = 1, ..., m$ bis $\dim\ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^m = \mu(f, \lambda_i)$.
   (b) Bestimme absteigend von m die Vektorräume V_l, sodass $V_l \oplus \ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^{l-1} = \ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^l$ und davon eine Basis. Wende auf die Vektoren der Basis die Abbildung $(A - \lambda_i \cdot E_n)$ an und berücksichtige diese Vektoren im nächsten Schritt.
3. ...

Def.
- **Euklidische Norm:** Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ setzen wir $\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}$
- **Operatornorm:** Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ setzen wir $\|A\| := \max\{\|Av\| \mid v \in \mathbb{C}^n, \|v\| = 1\}$

Satz. Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k$$

absolut.

Def. Die Funktion

$$\exp : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k$$

heißt **Exponentialfunktion** für Matrizen.

Bem. Es gilt:
- $\exp(0) = E_n$
- $\exp(\lambda \cdot E_n) = e^\lambda \cdot E_n$ für $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$
- exp ist stetig.

Satz. Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$ gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

Def. Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei

$$\phi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad t \mapsto \exp(t \cdot A)$$

Satz. Die Abbildung $\phi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\phi'_A(t) = A \cdot \phi_A(t).$$

Satz. Es gilt:

$$\exp(t \cdot J(\lambda, n)) = \exp(t\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Def. Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\langle x, y\rangle := x_1 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Dies ist das **Skalarprodukt** im $\mathbb{R}^n$.

Def. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

definieren wir die **transponierte Matrix** durch

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}.$$

Def. Es sei K ein Körper und V ein K-VR. Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung

$$\gamma : V \times V \to K,$$

sodass γ linear in jedem Argument, d. h. die Abbildungen

$$\gamma(v, -) : V \to K, \quad w \mapsto \gamma(v, w)$$
$$\gamma(-, w) : V \to K, \quad v \mapsto \gamma(v, w)$$

für beliebige $v, w \in V$ linear sind.

Def. Für eine Bilinearform γ auf einem Vektorraum V und eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ von V definieren wir die **darstellende Matrix** von γ bzgl. $\mathcal{B}$ durch

$$M_B(\gamma)_{ij} := \gamma(b_i, b_j).$$

Satz. Sei $A \in K^{n\times n}$ die darstellende Matrix einer Bilinearform γ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$. Für $v, w \in V$ mit Koordinatenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

gilt

$$\gamma(v, w) = x^T A y.$$

Kor. Sind γ und γ' zwei Bilinearformen mit $M_B(\gamma) = M_B(\gamma')$, so gilt $\gamma = \gamma'$.

Satz. Sei $\mathcal{C}$ eine weitere Basis von V und $T_\mathcal{C}^\mathcal{B}$ die Koordinatentransformationen von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$M_\mathcal{B}(\gamma) = (T_\mathcal{C}^\mathcal{B})^T \cdot M_\mathcal{C}(\gamma) \cdot T_\mathcal{C}^\mathcal{B}.$$

Def. Eine Bilinearform $\gamma : V \times V \to K$ heißt symmetrisch, falls $\gamma(v, w) = \gamma(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt. Äquivalent dazu ist eine Bilinearform auf einem endlichdim. VR V symmetrisch, wenn $M_\mathcal{B}(\gamma)^T = M_\mathcal{B}(\gamma)$ gilt.

Def. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
- Eine symmetrische Bilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **positiv definit**, falls $\gamma(v, v) > 0$ für alle $v \in V\backslash\{0\}$ gilt.
- Eine symmetrische, positive definite Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-VR heißt **(euklidisches) Skalarprodukt**.
- Ein $\mathbb{R}$-VR, auf dem ein euklidisches Skalarprodukt definiert ist, heißt **(euklidischer) Vektorraum**.

Def. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
- Eine Abbildung $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt **Sesquilinearform**, falls γ linear im ersten Argument, jedoch konjugiert-linear im zweiten Argument ist, d. h. für alle $v, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\gamma(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \overline{\lambda_1}\gamma(v, w_1) + \overline{\lambda_2}\gamma(v, w_2).$$

- Eine Sesquilinearform γ heißt **hermitesch**, falls

$$\gamma(v, w) = \overline{\gamma(w, v)}$$

  für alle $v, w \in V$. Für alle $v \in V$ gilt dann $\gamma(v, v) = \overline{\gamma(v, v)}$, also $\gamma(v, v) \in \mathbb{R}$.
- Eine hermitesche Sesquilinearform γ heißt **(unitäres) Skalarprodukt**, falls γ positiv definit ist, d. h. $\gamma(v, v) > 0$ für alle $v \in V$ ist.

Def. Sei $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf einem $\mathbb{C}$-VR V und $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V. Dann ist die **darstellende Matrix** von γ

$$(M_\mathcal{B})_{ij} := \gamma(b_i, b_j).$$

Bem. Eine Bilinearform auf einem endlichdim. $\mathbb{C}$-VR ist genau dann hermitesch, wenn $M_\mathcal{B}(\gamma)^T = \overline{M_\mathcal{B}(\gamma)}$ gilt.

Def. Für euklidische bzw. euklidische VR V und $v \in V$ setzen wir

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Def. Sei V ein euklidischer/unitärer VR.
- Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen **orthogonal** (geschrieben $v \perp w$), falls $\langle v, w\rangle = 0$ gilt.
- Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren heißt **orthogonal**, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt.
- Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt **orthonormal**, falls sie orthogonal ist und zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in I$ erfüllt.
- Eine orthogonale Familie, die eine Basis von V ist, heißt **Orthonormalbasis**.

Satz. Für $v, w \in V$ mit $v \perp w$ gilt $\|v + w\|^2 = v^2 + w^2$.

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Dann gilt für alle $v, w \in V$

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Satz. Sei V ein euklidischer/unitärer VR. Dann definiert die Funktion

$$\|{-}\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

eine Norm auf V.

Satz. Sei V ein euklidischer/unitärer VR, $(v_i)_{i\in I}$ eine orthogonale Familie und $v_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Dann ist die Familie (v_i) linear unabhängig.

Def. Zwei UVR $U, W \subset V$ heißen **orthogonal** (geschrieben $U \perp W$), falls $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$ gilt.

Def. Ist $U \subset V$ ein UVR, so ist

$$U^\perp := \{v \in V \,|\, v \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

ein UVR von V und heißt das **orthogonale Komplement** von U in V

Bem. Es gilt: $U \perp U^\perp$.

Satz. Jeder endlichdimensionale euklidische/unitäre VR besitzt eine Orthonormalbasis.

Kor. Sei V ein euklidischer/unitärer VR und $W \subset V$ ein endlichdim. UVR. Dann gilt

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Def. Sei V ein euklidischer VR und $(v_1, ..., v_k)$ eine endliche Familie von Vektoren in V. Dann ist

$$\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_k) := \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_k\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1\rangle & \cdots & \langle v_k, v_k\rangle \end{pmatrix}$$

die **Gramsche Determinante** von $(v_1, ..., v_k)$.

Satz. Es gilt $\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_k) \geq 0$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $(v_1, ..., v_k)$ linear abhängig sind.

Def. Wir definieren den von der Famile $(v_1, ..., v_k)$ aufgespannten **Spat** als

$$\mathrm{Spat}(v_1, ..., v_k) := \{t_1 v_1 + ... + t_k v_k \,|\, 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für } i = 1, ..., k\}$$

und dessen k-dimensionales Volumen als

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Spat}(v_1, ..., v_k)) := \sqrt{\mathrm{Gram}(v_1, ..., v_k)}.$$

Def. Es sei V ein K-VR. Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ der K-linearen Abbildungen $V \to K$ heißt der zu V **duale Vektorraum** und wird mit V^* bezeichnet. Die Elemente von V^* heißen **Linearformen** auf V.

Bem. Eine Linearform ist bereits eindeutig dadurch bestimmt, was sie mit den Vektoren einer Basis von V anstellt.

Satz. Sei V endlichdimensional und $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_k)$ eine Basis von V. Wir definieren für $j \in \{1, ..., k\}$ die Linearform $v_j^* : V \to K$ durch

$$v_j^*(v_i) := \delta_{ij}.$$

Dann ist $(v_1^*, ..., v_n^*)$ eine Basis von V^* und die Abbildung $v_i \mapsto v_i^*$ ein Isomorphismus $\phi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$.

Kor. Für endlichdim. VR V gilt: $\dim V = \dim V^*$.

Def. Sei $f : V \to W$ linear. Dann heißt die lineare Abbildung

$$f^* : W^* \to V^*, \quad \phi \mapsto \phi \circ f$$

zu f **duale Abbildung**.

Satz. Seien V, W endlichdim. VR mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ und $f : V \to W$ linear. Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(f^*) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)^T$$

Def. Ist $v \in V$, so definiert die Auswertung bei v

$$\iota_v : V^* \to K, \quad \phi \mapsto \phi(v)$$

ein Element in V^{**}.

Satz. Sei V endlichdim. Dann ist die Abbildung $\iota : V \to V^{**}, v \mapsto \iota_v$ ein (natürlicher) Isomorphismus und stimmt mit der Verknüpfung der bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^*$ definierten Isomorphismen $V \to V^*$ und $V^* \to V^{**}$ überein.

Def. Sei V ein K-VR. Ein Bilinearform $\gamma : V \times V \to K$ heißt **nicht ausgeartet**, falls die lineare Abbildung

$$\Phi : V \to V^*, \quad w \mapsto \gamma(-, w)$$

injektiv ist, d. h. für alle $w \neq 0$ existiert ein $v \in V$ mit $\gamma(v, w) \neq 0$.

Bem. Euklidische und unitäre Skalarprodukte sind immer nicht ausgeartet. Eine Bilinearform ist genau dann nicht ausgeartet, wenn ihre darstellende Matrix (bzgl. einer beliebigen Basis) invertierbar ist.

Satz. Sei V ein endlichdim. VR und die Bilinearform $\gamma : V \times V \to K$ nicht ausgeartet. Dann sind die Abbildungen

$$\Phi : V \to V^*, \quad w \mapsto \gamma(-, w)$$

$$\Psi : V \to V^*, \quad v \mapsto \gamma(v, -)$$

Isomorphismen.

Satz. Es gibt eine eineindeutige Entsprechung zwischen

- Isomorphismen $V \to V^*$
- nicht-ausgearteten Bilinearformen $V \times V \to K$

Dabei ordnen wir einem Isomorphismus $\Psi : V \to V^*$ die Bilinearform $(v, w) \mapsto \Psi(v)(w)$ zu.
Andersrum ist für einen endlichdim. euklidischen VR $(V, \langle -, -\rangle)$ die Abbildung

$$\Psi : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle v, -\rangle$$

ein Isomorphismus.

Def. Sei V ein K-VR und $W \subset V$ ein UVR. Dann heißt der UVR

$$W^0 := \{f \in V^* \,|\, f\,|_W = 0\}$$

Annulator von W in V^*.

Bem. Ist $\dim V < \infty$, so gilt $\dim W^0 = \dim V - \dim W$.

Satz. Sei V endlichdimensional und $W \subset V$ ein UVR. Dann gilt

$$\Psi(W^\perp) = W^0.$$

Def. Sei $W \subset V$ ein UVR. Wir definieren die Relation $\sim$ wie folgt:

$$v_1 \sim v_2 :\iff v_1 - v_2 \in W.$$

Dann ist die Äquivalenzklasse $[v]$ gleich dem affinen Teilraum

$$v + W = \{v + w \,|\, w \in W\}.$$

Durch die Setzung

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) := (v_1 + v_2) + W\lambda \cdot (v + W) \quad := \lambda v_1 + W$$

wird V/W zu einem K-Vektorraum, genannt **Quotientenraum** von V nach W.

Satz. Sei $(V, \langle -, -\rangle)$ ein euklidischer/unitärer VR und $W \subset V$ ein endlichdimensionaler UVR. Dann ist die Abbildung

$$\chi : W^\perp \to V/W, \quad v \mapsto [v]$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Kor. Für endlichdimensionale V gilt:
$\dim V/W = \dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Def. Seien V, W euklidische/unitäre VR. Eine eine $\mathbb{R}$/- bzw. $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt **orthogonal** bzw. **unitär**, falls für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle f(v), f(w)\rangle_W = \langle v, w\rangle_V.$$

Bem. Orthogonale/unitäre Abbildungen sind längenerhaltend (und somit injektiv) und bilden orthogonale Familien wieder auf orthogonale Familien ab. Die Umkehrung gilt auch:

Satz. Sei $f : V \to W$ linear und längenerhaltend. Dann ist f orthogonal bzw. unitär.

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ heißt **orthogonal** bzw. **unitär**, falls sie bzgl. der Standardskalarprodukte eine orthogonale bzw. unitäre Abbildung beschreibt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass

$$(Ax)^T(Ay) = x^T A^T A y = x^T y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$, also

$$A^T A = E_m$$

im euklidischen und

$$A^T \overline{A} = E_m$$

im unitären Fall.

Satz. Seien V und W endlichdim. euklidisch/unitär. Eine Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann orthogonal/unitär, wenn gilt: Bezüglich Orthonormalbasen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V und W ist die darstellende Matrix $M_C^B(f)$ orthogonal/unitär.

Satz. Sei V endlichdim. euklidisch/unitär und $f : V \to V$ ein orthogonaler/unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

- f ist ein Isomorphismus.
- f^{-1} ist ebenfalls orthogonal/unitär
- alle EW von f haben den Betrag 1
- Eigenvektoren zu unterschiedlichen EW sind orthogonal

Bem. Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) sind äquivalent:

- A ist orthogonal (unitär)
- Die Spalten von A bilden eine ONB.
- Die Zeilen von A bilden eine ONB.
- $A^{-1} = A^T$ (bzw. $\overline{A}^{-1} = A^T$)

Def. Die Untergruppen

$$O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \,|\, A \text{ orthogonal } \} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$$
$$O(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \,|\, A \text{ unitär } \} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$$

der multiplikativen Gruppen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ heißen **Gruppen der orthogonalen bzw. unitären Matrizen**.

Bem. Für alle $A \in O(n)$ und $A \in U(n)$ gilt $|\det A| = 1$.

Def. Sei V ein endlichdim. $\mathbb{R}$-VR.

- Zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V heißen **gleich orientiert**, falls gilt: $\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} > 0$.
- Die Äquivalenklassen der so definierten Relation heißen **Orientierungen** von V. Zwei Basen in derselben Äquivalenzklasse heißen **positiv**, Basen in unterschiedlichen Äquivalenzklassen **negativ orientiert**.
- Es seien V, W endlichdim. und orientierte VR, d. h. mit Äquivalenzklassen gleich orientierter Basen versehen. Ein Isomorphismus $V \to W$ heißt **orientierungserhaltend**, falls f eine positiv orientierte Basis von V auf eine positiv orientierte Basis von W abbildet.
- Für $V = \mathbb{R}^n$ heißt die Orientierungsklasse der Standardbasis $(e_1, ..., e_n)$ **Standardorientierung** oder **kanonische Orientierung** von $\mathbb{R}^n$.

Def. Die Gruppen

$$SO(n) := \{A \in O(n) \,|\, \det A = 1\}$$
$$SU(n) := \{A \in U(n) \,|\, \det A = 1\}$$

heißen **spezielle orthogonale/unitäre Gruppe**.

Bem. Die spezielle orthogonale Gruppe enthält genau die richtungserhaltenden, orthogonalen Endomorphismen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Satz. Sei $A \in O(2)$. Dann ist $\det A \in \{-1, 1\}$.

- Falls $\det A = 1$, gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$, sodass
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$
- Falls $\det A = -1$, gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$, sodass
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Satz. Sei V ein endlichdim., unitärer VR und $f : V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

- f ist diagonalisierbar
- V hat eine ONB aus Eigenvektoren von f

Verfahren. Eine ONB aus Eigenvektoren von f bestimmt man, indem man mittel Gram-Schmidt ONB von den Eigenräumen von f berechnet und diese zu einer Basis zusammensetzt.

Kor. Ist $A \in U(n)$, so gibt es ein $S \in U(n)$, sodass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit Betrag 1.

Satz. Es sei V ein endlichdim. euklidischer VR und $f : V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann existiert eine ONB von V, bezüglich der f durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei $A_1, ..., A_k \in SO(2)$ Drehmatrizen der Form

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

mit $\theta_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ sind.

Satz. Sei $A \in SO(3)$ mit $A \neq E_3$. Dann existiert eine ONB $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der die Abbildung A durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei $\phi \in [0, 2\pi]$. Wir können uns daher A als Drehung mit Drehachse $\mathrm{span}(v_1) \subset \mathbb{R}^3$ um den Winkel ϕ vorstellen. Die Drehachse und der Winkel ϕ sind durch A eindeutig bestimmt.

Satz. Es gilt:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} w & -\overline{z} \\ z & \overline{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C}, |w|^2 + |z|^2 = 1 \right\}$$

Def.

$$\mathbb{H} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} SU(2) \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Satz. Die Matrizen

$$\eta_0 := E_2, \quad \eta_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
$$\eta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis der reellen VR $\mathbb{H}$.

Satz. $\mathbb{H}$ ist ein (nicht-kommutativer) Ring mit $1 = \eta_0$. Jedes Element $x \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ besitzt ein multiplikatives Inverses. Damit ist $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe und $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper.

Def. Setzen wir $I := \eta_1, J := \eta_2, K := \eta_3$, dann gilt

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$
$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Satz. Es gilt

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ z & w \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{R}, w^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Def. Sei $G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ oder $G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Eine **Einparametergruppe** in G ist eine differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to G$, die außerdem ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +, 0) \to (G, \cdot, E_n)$ ist. Für die Differenzierbarkeit fassen wir G als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$ und ϕ als Zusammenfassung von Komponentenfunktionen auf.

Satz. Für alle $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ bzw. $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ definiert

$$\phi_A : \mathbb{R} \to G, \quad t \mapsto \exp(t \cdot A)$$

eine Einparametergruppe in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Satz. Es gilt $\mathrm{im}\,\phi_A \subset O(n) \iff A^T = -A$.

Bem. Es gilt für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\frac{d}{dt}\phi_A(t)\,|_{t=0} = A.$$

Daher heißt A **infinitesimaler Erzeuger** der Einparametergruppe ϕ_A.

Def. Der Vektorraum

$$\mathfrak{o}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^T = -A\}$$

heißt **Vektorraum der infinitesimalen Erzeuger von** $O(n)$.

Bem. Wegen

$$\det(\exp(tA)) = \exp(t \cdot \mathrm{spur}(A))$$

gilt $(\forall t \in \mathbb{R} : \det \phi_A(t) = 1) \iff \mathrm{spur}\, A = 0$.

Def. Der Vektorraum

$$\mathfrak{so}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^T = -A, \mathrm{spur}\, A = 0\}$$

heißt **Vektorraum der infinitesimalen Erzeuger von** $SO(n)$.

Satz. Es gilt $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

Def. Sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer/unitärer Vektorraum. ein Endomorphismus $f: V \to V$ heißt **selbstadjungiert**, wenn

$$\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Satz. Sei V endlichdim. euklidisch/unitär und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn folgendes gilt: Es sei $\mathcal{B}$ eine ONB von V und $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ die darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}$. Dann ist $\overline{A}^T = A$, d. h. A ist hermitesch bzw. symmetrisch.

Satz. Sei $f: V \to V$ selbstadjungiert. Dann sind alle EW von f reell und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Satz (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren)**.** Sei V ein endlichdim. euklidischer/unitärer VR und $f: V \to V$ selbstadjungiert. Dann besitzt V eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von f.

Kor. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch bzw. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann ist A diagonalisierbar. Es existiert eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von A.

Def. Sei ein V endlichdim. euklidisch/unitärer VR und $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die (paarweise verschiedenen) reellen EWe eines selbstadjungierten Endomorphismus $f: V \to V$. Setzen wir $W_i := \mathrm{Eig}(f; \lambda_i)$, so haben wir nach den bisher bewiesenen Aussagen eine Summenzerlegung

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathrm{pr}_{W_i}^{\perp}$$

von f als Linearkombination von selbstadjungierten Projektionen. Diese Zerlegung nennt man **Spektralzerlegung** von f.

Bem. Es ist nicht sinnvoll, von EWen einer symmetrischen Bilinearform $\gamma: V \times V \to K$ zu sprechen!

Satz. Sei V ein endlichdim. $\mathbb{R}$-VR und $\gamma: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ eine Diagonalmatrix ist.

Def. Eine **quadratische Form** vom Rang n über einem Körper K ist ein Polynom $Q \in K[X_1, ..., X_n]$ der Form

$$Q = \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} X_i X_j$$

mit $\alpha_{ij} \in K$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$. Man sagt auch, Q ist ein **homogenes Polynom vom Grad 2**.

Bem. Ist Q eine quadratische Form, so definiert Q eine Abbildung $\phi_Q: K^n \to K$, gegeben durch

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto Q(x_1, ..., x_n)$$

also durh Einsetzen der Körperelemente für die Unbestimmten. Wenn wir die Koeffizienten in einer Matrix $A := (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$ zusammenfassen, so sehen wir, dass

$$\phi_Q(x) = x^T A x.$$

Satz. Wir können aus ϕ_Q die Matrix A zurückgewinnen (falls $0 \neq 2$ in K gilt).

Def. Eine **affine Quadrik** im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + \langle b, x \rangle + c = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei wir A ohne Einschränkung als symmetrisch annehmen dürfen, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

Def. Eine affine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ nennt man einen **Kegelschnitt**.

Satz (Trägheitssatz von Sylvester)**.** Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und

$$\gamma: V \times V \to \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform. Es seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei Basen von V und $S := M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ und $T := M_{\mathcal{C}}(\gamma)$ die entsprechenden darstellenden Matrizen. Es seien s_+ und s_- die Anzahlen der positiven, bzw. negativen Eigenwerte von S. Entsprechend definieren wir t_+ und t_-. Dann gilt

$$s_+ = t_+, s_- = t_-.$$

Kor (Normalform für reelle symmetrische Bilinearformen)**.** Sei V ein endlichdim. $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n und $\gamma: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform der Signatur (r_+, r_-). Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 0 unten rechts die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{r_0 \times r_0}$ bezeichnet.

Def. Sei V ein endlichdim. $\mathbb{R}$-VR und $\gamma: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Wir nennen γ

- **positiv definit**, falls $\gamma(v,v) > 0$ für alle $v \in V \backslash \{0\}$,
- **positiv semidefinit**, falls $\gamma(v,v) \ge 0$ für alle $v \in V$,
- **negativ definit**, falls $\gamma(v,v) < 0$ für alle $v \in V \backslash \{0\}$,
- **negativ semidefinit**, falls $\gamma(v,v) \le 0$ für alle $v \in V$,
- **indefinit**, falls es $v, w \in V$ gibt mit $\gamma(v,v) < 0$ und $\gamma(w,w) > 0$.

Bem. Positiv definite symmetrische Bilinearformen auf reellen Vektorräumen werden Skalarprodukt genannt.

Satz. Sei V ein endlichdim. $\mathbb{R}$-VR und $\gamma: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform der Signatur (r_+, r_-). Dann gilt:

- γ ist genau dann positiv definit, falls $r_+ = n$.
- γ ist genau dann positiv semidefinit, falls $r_- = 0$.
- γ ist genau dann indefinit, falls $r_+ > 0$ und $r_- > 0$.

Satz (Hauptminoren-Kriterium)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Für $k = 1, ..., n$ bezeichnen wir mit $H_k \in \mathbb{R}$ die Determinante der linken oberen $(k \times k)$-Teilmatrix A_k von A (auch k-ter Hauptminor genannt). Dann sind äquivalent:

- A ist positiv definit.
- $H_k > 0$ für alle $k = 1, ..., n$.