

Zusammenfassung Markovketten

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Endliche Markovketten

Setting. Sei $E \neq \emptyset$ eine höchstens abzählbare Menge, die Zustandsmenge. Eine **stochastische Matrix** Π auf E ist geg. durch eine Abbildung $p : E \times E \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\sum_{y \in E} p(x, y) = 1 \quad \forall x \in E.$$

Def. Für einen Vektor $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\pi \Pi : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(\pi \Pi)(x) := \sum_{z \in E} \pi(z) \cdot p(z, x).$$

(Annahme dabei: $\sum_{z \in E} |\pi(z)| \cdot p(z, x) < \infty$ für alle $x \in E$.)

Def. Eine Folge von ZVn $\{X_n \in E\}$ heißt **Markovkette** auf E mit Übergangsmatrix p , falls für alle $n \geq 1$ und $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) = p(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

Interpretation. Bei gegebener Gegenwart $X_n = x_n$ ist die Zukunft X_{n+1} unabhängig von der Vergangenheit.

Bem. Die Verteilung der ganzen Folge $\{X_n\}$ ist durch die Verteilung von X_0 (Startverteilung) und durch p eindeutig bestimmt:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) \cdot \prod_{k=1}^n p(x_{k-1}, x_k)$$

Gibt $\pi_0 : E \rightarrow [0, 1]$ die Startverteilung an, und π_n die Verteilung nach dem n -ten Schritt für $n \geq 1$, so gilt

$$\pi_n = \pi_0 \Pi^n.$$

Def. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in E$ ist

$$p^{(n)}(x, y) := \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x)$$

die **n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit** von x nach y .

Lem (Kolmogorov-Chapman-Gleichung).

Für $\ell, k \in \mathbb{N}$, $x, y \in E$ gilt

$$p^{(k+\ell)}(x, y) = \sum_{z \in E} p^{(k)}(x, z) p^{(\ell)}(z, y).$$

Bem. Bekannte Spezialfälle:

$$\text{Vorwärtsgleichung: } p^{(k+1)}(x, y) = \sum_{z \in E} p^{(k)}(x, z) p(z, y)$$

$$\text{Rückwärtsgleichung: } p^{(k+1)}(x, y) = \sum_{z \in E} p(x, z) p^{(k)}(z, y)$$

Def. Eine Verteilung π heißt **stationär**, falls $\pi = \pi \Pi$.

Satz. Sei $\{X_n\}$ eine Markovkette auf einem endl. Zustandsraum E mit der Übergangsmatrix Π . Dann sind äquivalent:

- Es gibt ein $n_0 \geq 1$ mit $\forall x, y \in E : p^{(n_0)}(x, y) > 0$.
- Es existiert ein $\pi : E \rightarrow (0, 1]$ mit

$$p^{(n)}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y) \quad \forall x, y \in E.$$

In diesem Fall ist π die einzige stationäre Verteilung. Die Konvergenz ist exponentiell schnell:

$$|p^{(n)}(x, y) - \pi(y)| \leq C e^{-an} \quad \text{für Konstanten } C, a > 0.$$

Desweiteren gilt unabhängig von der Startverteilung

$$\mathbb{P}(X_n = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(y) \quad \forall y \in E.$$

Beweisidee. Def. Folgen $\{m_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{M_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $j \in E$ durch

$$m_j^{(n)} := \min_{i \in E} p^{(n)}(i, j), \quad M_j^{(n)} := \max_{i \in E} p^{(n)}(i, j).$$

Dann ist $\{m_j^{(n)}\}$ monoton steigend und $\{M_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton

fallend, also konvergent gegen $m_j^{(\infty)}$ bzw. $M_j^{(\infty)}$. Außerdem kann man zeigen:

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} \leq (1 - \epsilon) \cdot (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}),$$

wobei $\epsilon := \min_{i, j \in E} p^{(n_0)}(i, j)$. Somit gilt $m_j^{(\infty)} = M_j^{(\infty)}$ und nach dem Sandwichsatz konvergieren alle $p^{(n)}(i, j)$.

Achtung. Stationäre Verteil. können ohne Konvergenz existieren!

Satz. Falls $\forall x, y \in E : p^{(n_0)}(x, y) > 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^n \mathbb{1}\{X_k = x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(x) \quad \forall x \in E.$$

Bem. Eine Übergangsmatrix heißt **doppelt stochastisch**, falls

$$\sum_{y \in E} p(x, y) = 1 \quad \forall y \in E \quad \text{und} \quad \sum_{x \in E} p(x, y) = 1 \quad \forall x \in E.$$

Für jede solche Übergangsmatrix auf einem endlichen Raum ist die uniforme Verteilung stationär.

Bem (Paradox von Parrondo). Es gibt zwei Glücksspiele, bei denen man fast-sicher irgendwann all sein Geld verliert, dies aber nicht der Fall ist, falls man sie abwechselnd spielt! Diese Glücksspiele kann man als Markovketten modellieren, wobei der aktuelle Zustand durch die Anzahl an Euros im Besitz des Spielers gegeben ist.

Abzählbare Markovketten

Notation. Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum E .

Def. Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ def. die ZV $\tau_x^{(n)} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ind. durch

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &:= \inf \{n > 0 \mid Z_n = x\}, \\ \tau_x^{(k)} &:= \inf \{n > \tau_x^{(k-1)} \mid Z_n = x\}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

Bem. $F(x, y) > 0 \iff \exists n \geq 1 : p^{(n)}(x, y) > 0$

Bem. Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$.

Def. Für $x, y \in E$ sei $F(x, y) := P(\tau_y^{(1)} < \infty \mid Z_0 = x)$

Lem. Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x, y) \cdot F(y, y)^{k-1}.$$

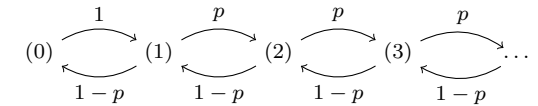
Bem. Mit $\tilde{\ell}(y) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$ gilt $\{\tau_y^{(k)} < \infty\} = \{\tilde{\ell} \geq k\}$.

Def. Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x, x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x, x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x, x) < 1$.

Bem. Absorbierende Zustände sind rekurrent.

Bsp. In der Markovkette



ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient.

Def. Die **Anzahl der Besuche** in $y \in E$ ist

$$\ell(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}.$$

Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$G(x, y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

$$\begin{aligned} \text{Bem. } G(x, y) &= \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x) \\ &= \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x, y). \end{aligned}$$

Satz. Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x, y) = \begin{cases} F(x, y) / (1 - F(y, y)) & \text{falls } x \neq y, \\ 1 / (1 - F(y, y)) & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Kor. x ist rekurrent $\iff G(x, x) = \infty$

Lem. Ist $F(x, y) \in (0, 1)$, so ist x nicht rekurrent.

Satz. Ist $x \in E$ rekurrent und $F(x, y) > 0$, so ist y auch rekurrent und $F(x, y) = F(y, x) = 1$.

Satz. Es sind äquivalent:

- x ist rekurrent
- $F(x, x) = 1$
- $G(x, x) = \infty$
- $\forall y \in E : F(x, y) \in \{0, 1\}$
- $\forall y \in E : G(x, y) \in \{0, \infty\}$

Def. $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall x, y \in E : F(x, y) > 0$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.

Satz. Irreduzible Ketten auf endlichen Räumen sind rekurrent.

Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten

Situation. $\{Z_n\}$ ist eine Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d , d. h.

$$p(x, y) = p(0, y - x) =: q(y - x).$$

Mit and. Worten: Die *Zuwächse* $\{Z_n - Z_{n-1}\}_{n \geq 1}$ sind i. i. d. ZVN.

Bsp. Einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z} : $p(0, 1) = p, p(0, -1) = q = 1 - p$ In diesem Fall kann man die Green'sche Funktion exakt berechnen:

$$G(x, x) = \dots = 1/|2p - 1|$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf \mathbb{Z} mit

$$\mathbb{E}|Z_1 - Z_0| = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x| p(0, x) < \infty.$$

Dann gilt: $\{Z_n\}$ ist rekurrent $\iff \sum_{x \in \mathbb{Z}} x p(0, x) = 0$.

Def. Die **einfache symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d** ist die translationsinvariante Markovkette mit

$$p(0, \pm e_i) = \frac{1}{2d} \quad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

Bem. Für einfache symmetrische Irrfahrten gilt:

$$p^{(2n)}(x, x) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_d = n}} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2 \dots (k_d!)^2} (2d)^{-2n}$$

Für $d = 2$ gilt $p^{(2n)}(0, 0) = \left[\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right]^2$. Mit der Stirling'schen Formel folgt $p^{(2n)}(0, 0) \approx \frac{1}{\pi n}$. Somit gilt $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(2n)}(0, 0) = \infty$.

Fazit. Die zweidimensionale einfache symm. Irrfahrt ist rekurrent.

Resultat. Für einfache symm. Irrfahrten auf \mathbb{Z}^d gilt

$$p^{(2n)}(0, 0) \leq C_d/n^{d/2} \quad \text{für eine Konstante } C_d > 0.$$

Somit ist die einfache Irrfahrt transient für alle $d \geq 3$.

Def. $\varphi(t) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p(0, x) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}^d$

Bem. Da die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}$ i. i. d. sind, gilt

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p^{(n)}(0, x) = \varphi^n(t), \quad n \geq 1$$

Inversionsformel: $p^{(n)}(0, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{-i(t \cdot x)} \varphi^n(t) dt$

Satz. Für jede Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf \mathbb{Z}^d gilt

$$G(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\lambda \uparrow 1} \int_{[-\pi, \pi]^d} Re\left(\frac{1}{1 - \lambda \varphi(t)}\right) dt = \infty$$

Bsp. Für die einfache symm. Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf \mathbb{Z}^d ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(t_k).$$

Mit der Ungleichung $1 - \cos(u) \geq c_0 u^2$ für alle $u \in [-\pi, \pi]$ folgt

$$\implies \frac{\varphi(t)}{1 - \lambda \varphi(t)} \geq \frac{c_0}{d} |t|^2 \leq \frac{c_0}{\lambda c_0} |t|^{-2}$$

Die Funktion $|t|^{-2}$ ist $\forall d \geq 3$ auf $[-\pi, \pi]^d$ integrierbar. Somit:

Satz. Jede irreduzible Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d mit $d \geq 3$ ist transient.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf \mathbb{Z} mit $p(0, x) = p(0, -x)$. Gelte

$$x^\alpha p(0, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} c \in (0, \infty)$$

für ein $\alpha > 1$. Dann ist

$$1 - \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - \cos(nt)) p(0, n) \quad \text{und} \quad \frac{1 - \varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^\alpha p(0, n) |t| f(nt)$$

mit $f(x) = (1 - \cos(x))/|x|^\alpha$. Außerdem ist $|n|^\alpha p(0, n) = c + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \rightarrow 0$ für $|n| \rightarrow \infty$. Es folgt

$$\frac{1 - \varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c |t| f(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt).$$

Für $t \rightarrow 0$ hat man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |t| f(nt) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt) \rightarrow 0.$$

Es folgt für $\alpha < 3$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{|x|^\alpha} dx < \infty.$$

Folglich ist $1/(1 - \varphi(t))$ für

- $\alpha < 2$ integrierbar und somit $\{Z_n\}$ transient und für
- $\alpha = 2$ in der Umg. von 0 nicht int'bar und damit $\{Z_n\}$ rekurrent.

Für $\alpha > 2$ ist $\sum |x| p(0, x) < \infty$ und somit ist die Irrfahrt rekurrent, da der Erwartungswert der Zuwächse null ist.

Erneuerungstheorie

Situation. Seien $\{X_k\}_{k \geq 1}$ unabhängige ZVN mit Werten in \mathbb{N}_0 und $P(X_k \geq 1) > 0$, wobei $\{X_k\}_{k \geq 2}$ identisch vert. sind. Dann definiert

$$Z_n := \sum_{k=1}^n X_k$$

eine Irrfahrt $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ mit nicht-negativen Zuwächsen auf \mathbb{Z} . Setze $p_k := P(X_2 = k)$ für $k \geq 0$. Wir nehmen an, dass

$$a := \mathbb{E}[X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \in (0, \infty).$$

Ziel. Untersuche das asympt. Verhalten von $G(0, x)$.

Def. Die **erzeugende Funktion** einer Folge $\{a_n\}$ ist

$$A(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Rechnung. Def. $q_k := \frac{1}{a} \sum_{j=k}^{\infty} p_j$ für $k \geq 1$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. Sei X_1 eine ZV mit $P(X_1 = k) = q_k, k \geq 1$. Setze

$$f(s) := \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_2}], \quad |s| \leq 1$$

$$g(s) := \sum_{k=1}^{\infty} q_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_1}], \quad |s| \leq 1$$

$$\psi(s) := \sum_{x=1}^{\infty} G(0, x) s^x, \quad |s| < 1$$

Dann gilt für $|s| < 1$:

$$\psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g(s) f(s)^{k-1} = g(s)/(1 - f(s))$$

Außerdem gilt:

$$g(s) = \frac{1}{a} (1 - f(s)) \sum_{x=1}^{\infty} s^x = \frac{s}{a(1-s)} (1 - f(s))$$

Es folgt $\psi(s) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{a} s^x$. Somit ist $G(0, x) = \frac{1}{a}$.

Satz. Angenommen, $\text{ggT}\{k \mid p_k > 0\} = 1$. Dann gilt für jede Verteilung von X_1 , dass

$$G(0, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a}.$$

Def. Seien $\{X_k\}_{k \geq 1}$ unabhängige, nichtneg. ZVN und seien $\{X_k\}_{k \geq 2}$ identisch verteilt. Setze $Z_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \eta(t) &:= \min\{k \geq 1 \mid Z_k > t\} && \text{Erneuerungsprozess und} \\ H(t) &:= \mathbb{E}[\eta(t)] && \text{Erneuerungsfunktion.} \end{aligned}$$

Falls X_k nur Werte aus \mathbb{N} annimmt, so können wir das Verhalten von $H(t) - H(t-1)$ wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} H(t) &= \mathbb{E}[\eta(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} P(\eta(t) > k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k \leq t) \\ \rightsquigarrow H(t) - H(t-1) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1/\mathbb{E}[X_2]. \end{aligned}$$

Def. $\gamma(t) := t - Z_{\eta(t)-1} \geq 0$ heißt **Undershoot**,
 $\chi(t) := Z_{\eta(t)} - t > 0$ heißt **Overshoot**.

Satz. Sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt, so gilt

$$P(\gamma(t) = i, \chi(t) = j) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{P_{i+j}}{\mathbb{E}[X_2]} \quad \text{für alle } i \geq 0, j \geq 1.$$

Kor. $P(\gamma(t) = i) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \sum_{k=i+1}^{\infty} p_k$ für $i \geq 0$,

$$P(\chi(t) = j) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \sum_{k=j}^{\infty} p_k \quad \text{für } j \geq 0$$

Positive Rekurrenz

Def. $x \in E$ heißt **positiv rekurrent**, falls $\mathbb{E}[\tau_x^{(1)} | Z_0 = x] < \infty$.
Ist x rekurrent, aber nicht pos. rekurrent, so heißt x **nullrekurrent**.

Bem. positive Rekurrenz \implies Rekurrenz

LEM. Sei x ein positiv rekurrenter Zustand.
Ist $F(x, y) > 0$, so ist auch y positiv rekurrent.

KOR. Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel und $x_0 \in E$ positiv rekurrent, so gilt:

- alle Zustände sind positiv rekurrent
- $m(x, y) := \mathbb{E}[\tau_y^{(1)} | Z_0 = x] < \infty$ für alle $x, y \in E$

Def. Die Zahl $d_x := \text{ggT}\{n \geq 1 | p^{(n)}(x, x) > 0\}$ heißt **Periode** von x . Falls $d = d_x$ für alle $x \in E$, so heißt d **Periode** der Kette $\{Z_n\}$.

LEM. Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel, so gilt $d_x = d_y$ für alle $x, y \in E$.

Satz. Es gibt eine Familie $\{\pi_y \in \mathbb{R}_{>0}\}_{y \in E}$, sodass

$$\forall x, y \in E : p^{(n)}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_y$$

genau dann, wenn

- $\{Z_n\}$ irreduzibel und
- aperiodisch (d. h. $d = 1$) ist und
- ein x_0 existiert, sodass $m(x_0, x_0) < \infty$.

Die Folge $\{\pi_y\}_{y \in E}$ ist die eindeutige Lösung zu

$$\begin{cases} \sum_{y \in E} |P_y| < \infty \\ \sum_{y \in E} \pi_y = 1 \\ \sum_{x \in E} \pi_x p(x, y) = \pi_y \text{ für alle } y \in E \end{cases}$$

Es gilt $\pi_y = 1/m(y, y)$.

TODO: Beweisidee aufschreiben

Def. Eine Verteilung $\{\mu_x\}_{x \in E}$ auf E heißt **stationär**, falls

$$\mu_x = \sum_{y \in E} \mu_y p(y, x) \quad \text{für alle } x \in E \quad (\text{kurz: } \mu = \mu P).$$

Bem. Für eine stationäre Verteilung $\{\mu_x\}_{x \in E}$ gilt

$$\mu_x = \sum_{y \in E} \mu_y p^{(n)}(y, x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

LEM. Sei x ein positiv rekurrenter Zustand. Dann definiert

$$\mu_y^{(x)} := \frac{1}{m(x, x)} \cdot \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\tau_x^{(1)}-1} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x \right]$$

für alle $y \in E$ eine stationäre Verteilung $\{\mu_y^{(x)}\}_{y \in E}$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist pos. rekurrent} \iff \{Z_n\} \text{ hat eine stationäre Verteilung.}$$

In diesem Fall ist die stationäre Verteilung eindeutig.

Satz. Eine irreduzible Kette auf einem endlichen Zustandsraum ist immer positiv rekurrent. Ferner existieren $C > 0$ und $q \in (0, 1)$ mit

$$P(\tau_y^{(1)} > n | Z_0 = x) < Cq^n \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und } x, y \in E.$$

Satz (Ergodizität). Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und positiv rekurrent. Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich der stationären Verteilung $\{\pi_x\}$, d. h. $\sum_{x \in E} |f(x)| \pi_x < \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(Z_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f. s.}} \sum_{x \in E} f(x) \pi_x$$

Beweisskizze. Für $f(y) := \mathbb{1}\{y = x_0\}$: Betrachte die i. i. d. ZVen $X_k := \tau_{x_0}^{(k)} - \tau_{x_0}^{(k-1)}$. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\tau_{x_0}^n / n = (X_1 + \dots + X_n) / n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} m(x_0, x_0) \quad \text{fast sicher.}$$

Dies ist äquivalent zu $\sum_{k=1}^n \mathbb{1}\{X_k = x_0\} \rightarrow 1/m(x_0, x_0)$ fast sicher.

Bsp. Für $f(y) := \mathbb{1}\{y = x_0\}$ für eine $x_0 \in E$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}\{Z_k = x_0\} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f. s.}} \pi_{x_0}, \\ \implies \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p^{(k)}(x, x_0) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi_{x_0}. \end{aligned}$$

LEM. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette mit der Periode $d \geq 1$. Für jedes $x \in E$ existiert ein $m_x \geq 1$ mit

$$p^{(md)}(x, x) > 0 \quad \text{für alle } m \geq m_x.$$

Prop. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und periodisch mit $d \geq 1$. Dann existieren paarweise disjunkte $C_0, C_1, \dots, C_{d-1} \subseteq E$ mit $C_0 \cup \dots \cup C_{d-1} = E$ und

$$\{y \in E | x \in C_i, p(x, y) > 0\} = C_{(i+1)\%d}.$$

In anderen Worten: Die Mengen C_i werden zyklisch besucht.

Bem. Die Markovkette $\{Z_{md}\}_{m \geq 0}$ ist nicht irreduzibel (für $d > 1$) aber die Restriktion auf jedes C_i ist irreduzibel und außerdem aperiodisch. Mit dem Ergodensatz erhalten wir

$$p^{(md)}(x, y) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} d/m(y, y) \quad \text{für alle } x, y \in C_i$$

Falls $x \in C_0$ und wir wollen $p^{(md+r)}(x, y)$ berechnen, so reicht es $y \in C_r$ zu betrachten. Definiere

$$F_r(x, y) := \mathbb{P}(\tau_y^{(1)} < \infty, \tau_y^{(1)} \equiv r \pmod{d} | Z_0 = x)$$

Es gilt dann:

$$p^{(md+r)}(x, y) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} F_r(x, y) d/m(y, y)$$

Martingale

Setting. Sei im Folgenden (Ω, \mathcal{F}, P) ein Maßraum.

Def. Eine wachsende Folge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots$ von σ -Algebren heißt **Filtration**. Eine Folge von ZVn $\{M_n\}$ heißt **adaptiert** an die Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$, falls M_n \mathcal{F}_n -messbar ist für jedes $n \geq 0$.

Def. Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Eine ZVe \widehat{X} heißt **bedingte Erwartung** von X bzgl. einer σ -Alg. \mathcal{A} , falls sie \mathcal{A} -messbar ist u.

$$\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\widehat{X} \mathbb{1}_A] \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Def. Eine $\{F_n\}$ -adapt. Folge $\{M_n\}$ mit $\forall n : \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ heißt

$$\left. \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Submartingal} \\ \text{Supermartingal} \end{array} \right\} \text{ falls } \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] \begin{cases} = \\ \geq \\ \leq \end{cases} M_n \quad \forall n \geq 0.$$

Bem. • $\{M_n\}$ ist Submartingal $\iff \{-M_n\}$ ist Supermartingal

• $\{M_n\}$ ist Martingal $\iff \{M_n\}$ ist Super- und Submartingal

Bem. Martingal-Strategie für wdh. Werfen einer fairen Münze:

- 1. Runde: Einsatz = 1 Euro, bei Gewinn Ausstieg
- 2. Runde: Einsatz = 2 Euro, bei Gewinn Ausstieg, ...
- n . Runde: Einsatz = 2^{n-1} Euro, bei Gewinn Ausstieg

Es gilt: $T = \inf\{n \geq 1 | n\text{-te Runde ist gewonnen}\} < \infty$ fast sicher, der Gewinn ist 1 Euro.

Bsp. Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVn mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ für alle $i \geq 0$. Sei $M_n := X_1 + \dots + X_n$. Dann ist $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Def. Für eine Folge $\{M_n\}$ von ZVn heißt $\{\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)\}_{n \geq 0}$ **natürliche Filtration**.

Def. $\{M_n\}$ ist Martingal : $\iff \{M_n\}$ ist Martingal bzgl. der natürlichen Filtration

LEM. Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt $\mathbb{E}[M_{i+1}] \geq \mathbb{E}[M_i]$.

LEM. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_i] = M_i \quad \text{für alle } i \leq n.$$

LEM. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$ und sei φ eine konvexe messbare Funktion. Falls $\mathbb{E}[|\varphi(M_n)|] < \infty$ für alle $n \geq 1$, so ist die Folge $\{\varphi(M_n)\}_{n \geq 0}$ ein Submartingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$

Bem. Die Aussage des vorh. Lemmas gilt auch, falls $\{M_n\}$ nur ein Submartingal, dafür aber φ zusätzlich monoton wachsend ist.

Bsp. $\{M_n\}$ Martingal $\implies M_n^2, M_n^+, |M_n|$ Submartingale

Bsp. Ein Anleger kauft H_0 Aktien einer Firma. Es sei W_0 der Wert der Aktien beim Kauf, Y_n der Kurs der Aktie n Tage nach dem Kauf und H_n die Anzahl der Aktien n Tage nach dem Kauf. Forderung: H_n soll $\sigma(Y_0, \dots, Y_{n-1})$ -messbar sein. Sei W_n der Wert der Aktien n Tage nach dem Kauf. Es gilt

$$W_n = W_{n-1} + H_n(Y_n - Y_{n-1}) = W_0 + \sum_{i=1}^n H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

Falls $\{Y_n\}$ ein Martingal ist, so gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[W_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= W_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= W_n + H_{n+1} \mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n] \\ &= W_n + H_{n+1}(\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] - Y_n) \\ &= W_n \quad (\text{bzw. } \geq W_n \text{ f\u00fcr Sub- und } \leq W_n \text{ f\u00fcr Supermartingale}). \end{aligned}$$

Fazit: Mit Handelsstrategie kann man keine Anlage verbessern.

Def. Eine Folge $\{H_n\}_{n \geq 1}$ hei\u00dft **pr\u00e4visibel**, falls H_n \mathcal{F}_{n-1} -messbar ist f\u00fcr alle $n \geq 1$. Definiere $\{H \cdot Y\}_n$ durch

$$(H \cdot Y)_n := \sum_{i=1}^n H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

Satz. Sei $\{Y_n\}$ ein Supermartingal und sei $\{H_n\}$ pr\u00e4visibel jeweils bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$. Falls $H_n \in [0, C_n]$ f\u00fcr Konstanten $\{C_n\}$, so ist $\{(H \cdot Y)_n\}$ auch ein Supermartingal.

Bem. Man kann den Satz f\u00fcr Submartingale und Martingale formulieren. F\u00fcr Martingale reicht es anzunehmen, dass $|H_n| \leq C_n$.

Def. Eine Abb. $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ hei\u00dft **Stoppzeit** bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$, falls

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{f\u00fcr alle } n \geq 0.$$

Bsp. Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVn und sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $T = \inf\{n \geq 0 \mid M_n \in A\}$ eine Stoppzeit bzgl. $\{\sigma(M_0, \dots, M_n)\}_n$.

Satz (Optional Stopping Theorem 1).

Ist $\{M_n\}$ ein (Sub-/Super-) Martingal und T eine Stoppzeit, so ist $\{M_{\min(T,n)}\}$ auch ein (Sub-/Super-) Martingal.

Fast sichere Konvergenz

Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVn und $a < b$ reelle Zahlen. Definiere

$$\begin{aligned} N_0 &:= -1, \\ N_{2k-1} &:= \inf\{n > N_{2k-2} \mid M_n \leq a\}, \\ N_{2k} &:= \inf\{n > N_{2k-1} \mid M_n \geq b\}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der *Aufkreuzungen* ist dann

$$U_n := \max\{k \mid N_{2k} \leq n\}.$$

Satz (Doob'sche Aufkreuzungsungleichung).

Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt f\u00fcr alle $a < b$ und alle $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[U_n] \leq (\mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_0 - a)^+]) / (b - a).$$

Beweisskizze. Def. Submartingal $\{Y_n\}$ durch $Y_n := \max\{a, M_n\}$. Sei $\{H_m\}$ Folge mit $H_m := \mathbb{1}\{\exists k : N_{2k-1} < m \leq N_{2k}\}$. Dann gilt

$$(H \cdot Y)_n \geq U_n \cdot (b - a).$$

Die Aussage folgt nun zusammen mit der Absch\u00e4tzung

$$\mathbb{E}[(H \cdot Y)_n] = \mathbb{E}[Y_n - Y_0] - \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n ((1 - H_i) \cdot (Y_i - Y_{i-1}))] \leq \mathbb{E}[Y_n - Y_0].$$

Satz (Martingalkonvergenzsatz).

Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal mit $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Dann existiert eine ZV M_∞ mit $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$ sodass $M_n \rightarrow M_\infty$ fast-sicher.

Beweisskizze. Aus der Aufkreuzungsungleichung folgt, dass

$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} U_n < \infty) = 1$ (unabh. von a und b). Somit ist

$$\mathbb{P}(\cup_{a,b \in \mathbb{Q}} \{\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n < a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n\}) = 0.$$

Dies ist \u00e4quivalent dazu, dass $\{M_n\}$ fast-\u00fberall konvergiert.

Bsp (Polya-Urne). Urne mit b blauen und r roten Kugeln. In jeder Runde wird eine Kugel gezogen und mit einer weiteren Kugel gleicher Farbe zur\u00fcckgelegt. Sei R_n die Anzahl von zugef\u00fcgten roten Kugeln nach n Runden.

Man kann zeigen: $\{M_n := (r + R_n) / (r + b + n)\}_{n \geq 0}$ ist ein Martingal.

Au\u00dferdem gilt $\sup \mathbb{E}[M_n^+] \leq 1$ Nach dem vorherigen Satz gilt also $M_n \rightarrow M_\infty$ fast-sicher. Man kann zeigen, dass $M_\infty \sim \text{Beta}(r, b)$,

$$f_{M_\infty}(x) = \frac{1}{B(r, b)} x^{r-1} (1-x)^{b-1}.$$

Kor. Sei $\{M_n\}$ ein nichtnegatives Supermartingal.

Dann existiert $M_\infty \in L_1$ mit $M_n \rightarrow M_\infty$ fast-sicher.

Martingalungleichungen

Satz (Optional Stopping Theorem 2).

Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal und sei T eine Stoppzeit bzgl. derselben Filtration mit $P(T \leq N) = 1$ f\u00fcr ein $N \geq 1$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_N].$$

Satz (Doob'sche Ungleichung).

Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal. Setze $M_n^* := \max\{M_1, \dots, M_n\}$. Dann:

$$\lambda \cdot P(M_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}\{M_n^* \geq \lambda\}] \leq \mathbb{E}[M_n^+].$$

Beweis. Definiere disjunkte Mengen F_1, \dots, F_n durch

$$F_k := \{M_1 < \lambda, \dots, M_{k-1} < \lambda, M_k \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_n.$$

Summieren folg. Ungleichung f\u00fcr $k = 1, \dots, n$ liefert Behauptung:

$$\lambda \cdot \mathbb{P}(M_k \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[M_k \cdot \mathbb{1}\{M_k \geq \lambda\}] \leq \mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}\{M_k \geq \lambda\}].$$

Bem. Die Doob'sche Ungl. verbessert die Markov-Ungleichung.

Kor (Kolmogorov-Ungleichung). Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVn mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. Setze $S_k = X_1 + \dots + X_k$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\max_{k \leq n} |S_k| \geq \lambda) \leq \text{Var}(S_n) / \lambda^2.$$

Satz. Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, dann gilt f\u00fcr jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k \leq n} M_k^+)^p] \leq (p/(p-1))^p \mathbb{E}[M_n^+]^p$$

Kor. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal. Dann gilt f\u00fcr jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k \leq n} |M_k|)^p] \leq (p/(p-1))^p \mathbb{E}[|M_n|^p]$$

Gleichgradige Integrierbarkeit, Konvergenz in L^1

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal mit $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$ f\u00fcr ein $p > 1$. Dann konvergiert M_n fast-sicher und in L^1 .

Def. Eine Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ hei\u00dft **gleichgradig integrierbar**, falls

$$\forall \epsilon > 0 : \exists M > 0 : \forall i \in I : \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}] < \epsilon.$$

Lem. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wkts-Raum, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ die Familie aller σ -Subalgebren von \mathcal{F} .

Dann ist die Familie $\{\mathbb{E}[X | \mathcal{A}_i]\}_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar.

Lem. Sei $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration und $X \in L^1$. Dann ist $\{M_n\}$ mit $M_n := \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Satz. F\u00fcr jedes Martingal $\{M_n\}$ (bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$) sind \u00e4quivalent:

- $\{M_n\}$ ist gleichgradig integrierbar
- $\{M_n\}$ konvergiert fast sicher und in L^1
- $\{M_n\}$ konvergiert in L^1
- $\exists M \in L^1 : \forall n \geq 0 : M_n = \mathbb{E}[M | \mathcal{F}_n]$ f. s.

Satz (L\u00e9vy's 'Upward' Thm). Sei $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration. Setze $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n)$ und $M_n := \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_n]$. Dann gilt f\u00fcr das gleichm\u00e4\u00dfig beschr\u00e4nkte Martingal $\{M_n\}$:

$$M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_\infty] \quad \text{fast-sicher und in } L^1.$$

Kor (Kolmogorow's 0-1-Gesetz). Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVn und $\tau := \cap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ die termin. σ -Algebra. Dann folgt f\u00fcr alle $A \in \tau$, dass $\mathbb{1}_A = \mathbb{P}(A)$ f. s. und somit $P(A) \in \{0, 1\}$.

Bsp. Betrachte eine Lipschitz-stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Setze

$$\begin{aligned} X_n &:= \sum_{k=1}^{2^n} (k-1)/2^n \mathbb{1}[(k-1)/2^n, k/2^n), \\ M_n &:= 2^n(f(X_n + 1/2^n) - f(X_n)). \end{aligned}$$

Dies sind ZVn auf $\Omega = [0, 1]$ mit dem Lebesgue-Ma\u00df. Dann ist $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. Somit gibt es ein $M \in L^1$ mit $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M$ fast-sicher und in L^1 . Es gilt dann

$$f(x) - f(0) = \int_0^x M(t) dt \quad \text{f\u00fcr alle } x \in [0, 1].$$

Optional Stopping Theorem

Satz. Sei T eine Stoppzeit. Falls

- $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal ist *oder*
 - $\mathbb{E}[|M_T|] < \infty$ und $\{M_n \mathbb{1}\{T > n\}\}$ gleichgradig integrierbar sind,
- so ist die Folge $\{M_{T \wedge n}\}$ ebenfalls gleichgradig integrierbar.

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal. Dann gilt f\u00fcr jede Stoppzeit T :

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_\infty].$$

Satz (Optional Stopping Theorem 3).

Seien $S \leq T$ zwei Stoppzeiten. Ist $\{M_{T \wedge n}\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, so gilt

$$M_S \leq \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S].$$

Rekurrenz/Transienz mit Martingaltheorie

Rekurrenz/Transienz von Folgen nichtneg. ZVn

Setting. Sei $\{Y_n\}$ eine Folge nichtnegativer ZVn.

Def. $\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) rekurrent**, falls

$$\exists r > 0 : P(\liminf_{n \rightarrow \infty} Y_n \leq r) = 1.$$

$\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) transient**, falls $P(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \infty) = 1$.

Satz. Sei $\{Y_n\}$ eine Folge mit $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = \infty) = 1$. Falls ein $M > 0$ mit $\mathbb{E}[Y_{n+1} | Y_n = x_n, \dots, Y_0 = x_0] \leq x_n$ für alle $x_n \geq M$ existiert, so ist $\{Y_n\}$ rekurrent.

Beweisskizze. Es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{P}(\exists m \geq k : Y_m \leq M) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei dazu $U_n^{(k)} := Y_{k+n} \cdot \mathbb{1}\{Y_k \geq M, \dots, Y_{n+k-1} \geq M\}$. Dann ist $\{U_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Supermartingal. Somit gibt es $U_\infty^{(k)}$ mit $U_n^{(k)} \rightarrow U_\infty^{(k)}$ fast sicher. Aus

$$\begin{aligned} \{\forall m \geq k : Y_m > M\} &= \{U_\infty^{(k)} > 0\} \\ \subseteq \{Y_n \rightarrow U_\infty^{(k)}\} &\subseteq \Omega \setminus \{\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = \infty\} \end{aligned}$$

folgt, dass $\mathbb{P}(\{\forall m \geq k : Y_m > M\}) = 0$.

Satz. Angenommen, es gibt Konstanten $T > M \geq 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : P(Y_n \leq T) = 1$ und $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = T) = 1$ sowie

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | Y_n = x_n, \dots, Y_0 = x_0] \geq x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_n \geq M.$$

Dann gilt $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ fast-sicher.

Beweisidee. Folgt aus dem Martingalkonvergenzsatz für das Submartingal $\{V_n\}$ mit $V_n := \max\{M, Y_n\} \leq T$.

Setting. Setze $\tau := \inf\{n \geq 1 | Y_n \leq r\}$ und $\tilde{Y}_n := Y_{n \wedge \tau}$.

Satz. Angenommen, es gibt ein $\epsilon > 0$ mit

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1} | \sigma(Y_0, \dots, Y_n)] \leq \tilde{Y}_n - \epsilon \mathbb{1}\{\tau > n\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für jeden konst. Startwert Y_0 die Ungleichung

$$\mathbb{E}[\tau] \leq Y_0 / \epsilon < \infty.$$

Beweis. $0 \leq \mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}] \leq Y_0 - \epsilon \cdot \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\tau > k) \leq Y_0 - \epsilon \cdot \mathbb{E}[\tau]$

Satz. Angenommen, $Y_0 > r$, $\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1} | \sigma(Y_0, \dots, Y_n)] \geq \tilde{Y}_n$ und

$$\exists M > 0 : \mathbb{E}[|\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n| | \sigma(Y_0, \dots, Y_n)] \leq M \quad \text{fast sicher.}$$

Dann gilt $\mathbb{E}[\tau] = \infty$.

Beweisskizze. Zunächst gilt $\mathbb{E}[|\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n|] \leq M \cdot \mathbb{P}(\tau > n)$ für alle n . Es folgt $\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}] \leq \mathbb{E}[Y_0] + M \cdot \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\tau > k) \leq \mathbb{E}[Y_0] + M \cdot \mathbb{E}[\tau]$. Wäre $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, so würde $\tilde{Y}_n \rightarrow Y_\tau$ konvergieren und es wäre

$$\mathbb{E}[Y_\tau] \geq \mathbb{E}[\tilde{Y}_n] \geq \mathbb{E}[Y_0] > r \geq \mathbb{E}[Y_\tau].$$

Transienz und Rekurrenz von Markovketten

Setting. Sei $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf \mathbb{N}_0 . Definiere

$$\begin{aligned} m_1(x) &:= \mathbb{E}[Z_1 - Z_0 \mid Z_0 = x] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k p(x, x+k), \\ m_2(x) &:= \mathbb{E}[(Z_1 - Z_0)^2 \mid Z_0 = x] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 p(x, x+k). \end{aligned}$$

Frage. Unter welchen Voraussetzungen an m_1, m_2 ist $\{Z_n\}$ (positiv) rekurrent oder transient?

Bem. Falls $m_1(x) \leq -\epsilon$ für alle $x \geq x_0$, so folgt positive Rekurrenz aus dem vorletzten Satz: Die Stoppzeit $\tau_r := \min\{n \geq 0 | Z_n \leq r\}$ hat endlichen Erwartungswert für jedes $r \geq x_0$.

Frage. Was passiert in dem Fall, wenn $m_1(x)$ von Null nicht getrennt ist? Hier hängt vieles von $m_2(x)$ ab.

Satz. Falls es ein $x_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\forall x \geq x_0 : 2x \cdot m_1(x) + m_2(x) \leq -\epsilon,$$

so ist die Kette $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

Beweisidee. Betrachte $Y_n := Z_n^2$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n | \sigma(Z_0, \dots, Z_n)] \leq -\epsilon \quad \text{auf } \{Y_n \geq x_0^2\}.$$

Somit ist $\{Y_n\}$ und damit auch $\{Z_n\}$ rekurrent.

Bsp. Angenommen, $m_1(x) \sim -c/x$ und $m_2(x) \sim 1$. Dann ist $2xm_1(x) + m_2(x) \sim 1 - 2c$. Für $c > 1/2$ ist die Kette pos. rekurrent.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irred. mit $|Z_{n+1} - Z_n| \leq B$ fast-sicher für alle n und ein $B > 0$. Außerdem gelte $\inf_x m_2(x) > 0$.

- Falls $\forall x \geq x_1 : 2xm_1(x) \leq (1 - \epsilon)m_2(x)$, so ist $\{Z_n\}$ rekurrent.
- Falls $\forall x \geq x_2 : 2xm_1(x) \geq (1 + \epsilon)m_2(x)$, so ist $\{Z_n\}$ transient.

TODO: Beweisidee beschreiben?

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d mit $Z_{n+1} - Z_n \in U_d$ wobei $U_d = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$, alle gleich wahrscheinlich. Wir wissen:

$$\{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff d \leq 2.$$

Dies können wir auch wie folgt zeigen: Betrachte $X_n := \|Z_n\|$. Dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid Z_n = x] &= \dots = \frac{1/2 - 1/d}{\|x\|} + O(1/\|x\|^2) \\ \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2 \mid Z_n = x] &= \dots = 1/d + O(1/\|x\|) \end{aligned}$$

Für $d = 1$ ist also

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid Z_n = x] \leq (1 - \epsilon)\mathbb{E}[(X_1 - X_0)^2 | Z_0 = x] / (2\|x\|)$$

Mit Hilfe von $Y_n := \log(1 + X_n)$ erhalten wir, dass $\{X_n\}$ rekurrent ist. Bei $d \geq 3$ gilt

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid Z_n = x] \geq (1 + \epsilon)\mathbb{E}[(X_1 - X_0)^2 | Z_0 = x] / (2\|x\|)$$

Für $d = 2$ können wir den vorh. Satz leider nicht benutzen.

Man kann den Satz aber verbessern, sodass aus

$$2xm_1(x) \leq (1 + \frac{1-\epsilon}{\log x})m_2(x)$$

schon Rekurrenz folgt.

Rekurrenz / Transienz mit Lyapunov-Fktn

Lemma. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette. Falls es eine endliche Menge $A \subseteq E$ mit

$$\mathbb{E}[\tau_A | Z_0 = x] < \infty \quad \forall x \in A$$

gibt, so ist $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

Satz (Kriterium von Foster). Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette. Dann sind äquivalent:

- Die Kette $\{Z_n\}$ ist positiv rekurrent.
- Es gibt eine Abbildung $f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, ein $\epsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge $A \subseteq E$ mit

$$\begin{aligned} \forall x \in E : \quad &\mathbb{E}[f(Z_1) | Z_0 = x] < \infty \\ \text{und } \forall x \in E \setminus A : \quad &\mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) | Z_0 = x] \leq -\epsilon. \end{aligned}$$

Beweisskizze. „ \Leftarrow “ Sei $x \in E$ beliebig. Setze

$$G_n := \sum_{y \in E} f(y) \mathbb{P}(Z_1 \notin A, \dots, Z_{n-1} \notin A, Z_n = y | Z_0 = x).$$

Dann gilt

$$G_n \leq \dots \leq G_1 - \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\tau_A > k | Z_0 = x)$$

und somit

$$\mathbb{E}[\tau_A | Z_0 = x] \leq 1 + G_1 / \epsilon < \infty.$$

Die Aussage folgt aus dem vorh. Lemma.

„ \Rightarrow “ Wähle $x_0 \in E$ beliebig und setze $A := \{x_0\}$. Dann erfüllt

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = x_0 \\ m(x, x_0) = \mathbb{E}[\tau_{x_0} | Z_0 = x] & \text{für } x \neq x_0 \end{cases}$$

die Gleichung $\mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) | Z_0 = x] = -1$ für alle $x \neq x_0$.

Lemma. Im Kontext der rechten Seite des Satzes:

Sei $y \in E \setminus A$ mit $y < \inf_{x \in A} f(x)$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\tau_A < \infty | Z_0 = y) \leq f(y) / \inf_{x \in A} f(x).$$

Beweisskizze. Betrachte das nichtneg. Supermartingal $\{Y_n\}$ mit $Y_n := f(Z_{n \wedge \tau_A})$. Es existiert dann Y_∞ mit $Y_n \rightarrow Y_\infty$ fast sicher. Nach dem Fatou-Lemma gilt $f(y) \geq \mathbb{E}[Y_\infty | Z_0 = y]$. Es gilt

$$Y_\infty \cdot \mathbb{1}\{\tau_A < \infty\} \geq (\inf_{x \in A} f(x)) \cdot \mathbb{1}\{\tau_A < \infty\}$$

und somit

$$f(y) \geq \mathbb{E}[Y_\infty \cdot \mathbb{1}\{\tau_A < \infty\} | Z_0 = y] \geq (\inf_{x \in A} f(x)) \cdot \mathbb{P}(\tau_A < \infty).$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E , E abzählbar. Dann gilt:

$\{Z_n\}$ ist transient $\iff \exists A \neq \emptyset \subset E : \exists f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} :$
 $\inf_{x \in E} f(x) < \inf_{x \in A} f(x),$
 $\forall x \in E \setminus A : \mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) | Z_0 = x] \leq 0.$

Beweisskizze. „ \Leftarrow “ Aus dem vorhergehenden Lemma folgt direkt $\mathbb{P}(\tau_A < \infty | Z_0 = y) < 1$, was Transienz impliziert. „ \Rightarrow “ Wähle $x_0 \in E$ und setze $A := \{x_0\}$. Dann erfüllt

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0, \\ F(x, x_0) = \mathbb{P}(\tau_{x_0} < \infty | Z_0 = x) & \text{für } x \neq x_0 \end{cases}$$

die Gleichung $\mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) | Z_0 = x] = 0$ und außerdem $f(x) < 1 = f(x_0)$ für alle $x \neq x_0$.

Kor. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E , E abzählbar. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist transient} \iff \exists x_0 \in E : \exists h : E \rightarrow \mathbb{R} : \\ h \text{ beschränkt, nicht konstant und} \\ \forall x \neq x_0 : \mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) | Z_0 = x] = 0.$$

Def. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $|X| = \infty$) heißt **unbeschränkt**, falls $\sup_{x \in B} f(x) = \infty$ für jede unendliche Teilmenge $B \subseteq X$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irred. Kette auf E , E abz. unendlich. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff \exists \text{ endliche Teilmenge } A \subset E : \\ \exists \text{ unbeschränkte Funktion } f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \\ \forall x \in E \setminus A : \mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) | Z_0 = x] \leq 0.$$

Beweisskizze. „ \Leftarrow “ Betrachte die Folge $\{Y_n\}$ mit $Y_n := f(Z_n)$. Es gilt $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = \infty) = 1$ und außerdem $\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n | Y_n = y] \leq 0$ für alle $y \geq M := 1 + \max_{a \in A} f(a)$. Nach einem früheren Resultat ist $\{Y_n\}$ topol. rekurrent und damit wegen der Unbeschränktheit von f auch $\{Z_n\}$ rekurrent.

Harmonische Fktn für Übergangskerne

Def. $P = (p(x, y))_{x, y \in E}$ heißt **substochast. Übergangskern**, falls

- $p(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in E$ und
- $\sum_{y \in E} p(x, y) \leq 1$ für alle $x \in E$.

Er heißt *strikt substochastisch*, falls $\sum_{y \in E} p(x_0, y) < 1$ für mindestens ein $x_0 \in E$.

Notation. Für $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ sei $Ph : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(Ph)(x) := \sum_{y \in E} p(x, y)h(y).$$

(Annahme dabei: h ist integrierbar, d. h. $\sum_{y \in E} p(x, y)|h(y)| < \infty$.)

Def. Eine integrierbare Funktion $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{harmonisch} \\ \text{superharmonisch} \end{array} \right\} \text{ falls } h(x) \left\{ \begin{array}{l} = \\ \geq \end{array} \right\} (Ph)(x) \quad \forall x \in E.$$

h heißt *strikt superharmonisch*, falls $h(x_0) > \sum_{y \in E} p(x_0, y)h(y)$ für mindestens ein $x_0 \in E$.

Bsp. Bei Diskretisierung der Laplace-Gleichung auf \mathbb{R}^2 mit der Finite-Differenzen-Methode erhält man das Gleichungssystem

$$Ph = h,$$

wobei P der stochastische Übergangskern der einfachen symmetrischen Irrfahrt auf \mathbb{Z}^2 ist.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Irrfahrt auf \mathbb{Z} . Setze

$$h(x) := \mathbb{P}(\forall n \geq 0 : Z_n > 0 | Z_0 = x) \quad \text{für } x \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist h harmonisch für den substochastischen Übergangskern

$$P(x, y) := p(x, y) \mathbb{1}\{x \geq 1, y \geq 1\}.$$

Verfahren. Falls P substochastisch ist, so kann man die Gleichung für harmonische Fktn zu einer Gleichung mit einem stochastischen (aber leider nicht irreduziblen) Kern P' umformulieren: Setze

$$E' := E \sqcup \{\dagger\}$$

und definiere $p' : E' \times E' \rightarrow [0, 1]$ für $x, y \in E$ durch

$$p'(x, y) := p(x, y), \quad p'(x, \dagger) := 1 - \sum_{y \in E} p(x, y), \\ p'(\dagger, y) := 0, \quad p'(\dagger, \dagger) := 1.$$

Dann ist P' stochastisch. Für $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ sei $h' : E' \rightarrow \mathbb{R}$ def. durch

$$h'|_E := h \quad \text{und} \quad h'(\dagger) := 0.$$

Dann gilt für alle $h : E \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h \text{ ist harmonisch für } P \iff h' \text{ ist harmonisch für } P'.$$

Bem. Ist P stochastisch, so ist jede Konstante harmonisch. Ist P strikt substochastisch, so ist jede Konstante $\neq 0$ strikt superharmonisch.

Bsp. Sei P ein substochastischer Kern und

$$G(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x, y)$$

die *Green'sche Funktion*. Für festes $y \in E$ betrachte die Funktion

$$h_y(x) := G(x, y).$$

Ist y transient (d. h. $G(y, y) < \infty$), so ist h_y superharmonisch.

Ist P irreduzibel (d. h. $\forall x, y \in E : \exists n \geq 1 : p^{(n)}(x, y) > 0$), so gilt außerdem $h_y(x) > 0$ für alle $x \in E$.

Lem (*Maximumsprinzip*). Sei P irreduzibel, substochastisch und h harmonisch für P . Falls ein Zustand $x_0 \in E$ mit

$$M := h(x_0) = \max_{x \in E} h(x)$$

existiert, so ist $h \equiv M$ konstant.

Ferner gilt: Falls $M \neq 0$, so ist P stochastisch.

Lem. Sei P irreduzibel und $h \geq 0$ superharmonisch. Dann gilt:

- $P^{(n)}h$ ist superharmonisch für alle $n \geq 0$.
- Entweder ist $h \equiv 0$ konstant oder $\forall x \in E : h(x) > 0$.

Lem. Sei $\{h_i\}_{i \in I}$ eine Familie von superharmon. Funktionen.

Ist $h(x) := \inf_{i \in I} h_i(x)$ integrierbar, so ist auch h superharmonisch.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irred. Kette mit Übergangsmatrix P . Dann gilt:

$\{Z_n\}$ ist rekurrent \iff jedes für P superharmon. $f \geq 0$ ist konstant.

Beweisskizze. „ \Rightarrow “ Betrachte das nichtneg. Supermartingal $\{Y_n\}$ mit $Y_n := h(Z_n)$. Dieses konvergiert gegen Y_∞ . Wegen Rekurrenz muss aber $Y_\infty = h(y)$ fast überall für alle $y \in E$ gelten. „ \Leftarrow “ Wähle $y_1, y_2 \in E$. Ist $\{Z_n\}$ transient, so ist die Funktion $G(-, y_2)$ harmonisch. Aus der Annahme folgt

$$F(y_1, y_2)/(1 - F(y_2, y_2)) = G(y_1, y_2) = G(y_2, y_2) = 1/(1 - F(y_2, y_2)).$$

Somit $F(y_1, y_2) = 1$. Analog $F(y_2, y_1) = 1$. Also y_1, y_2 rekurrent.

Bem. Jeder strikt substochastische, irreduzible Kern ist transient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x, y) < \infty \quad \forall x, y \in E$$

Lem/Def. Sei P ein substoch. Kern und $h > 0$ superharmonisch. Die **Doob'sche h -Transformation** von P ist der durch

$$p_h(x, y) := \frac{h(y)}{h(x)} \cdot p(x, y), \quad x, y \in E$$

definierte substochastische Übergangskern. Des Weiteren gilt:

$$h \text{ harmonisch} \iff P_h \text{ stochastisch.}$$

Lem. $(P_h)^n = (P^n)_h$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und h substochastisch für P

Bsp. Sei P der strikt substoch. Übergangskern auf \mathbb{N}_1 mit

$$p(i, j) = 1/2 \text{ für } i, j \in \mathbb{N}_1 \text{ mit } |i - j| = 1, \quad p(i, j) = 0 \text{ sonst.}$$

Die harmonischen Funktionen sind $\{h_c | c \in \mathbb{R}\}$ mit $h_c(k) := k \cdot c$. Die h_c -transformierte für bel. $c > 0$ ist dann

$$p_h(i, j) = \frac{j}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{j-i}{2i} \text{ für } i, j \in \mathbb{N}_1 \text{ mit } |i - j| = 1, \\ p_h(i, j) = 0 \text{ sonst.}$$

Sei $\{Z_n\}$ die Markovkette auf \mathbb{N}_1 mit Übergangsmatrix P_h und $\{\tilde{Z}_n\}$ die einfache symm. Irrfahrt auf \mathbb{Z} . Dann gilt

$$p_h^{(n)}(x, y) = y/x \cdot p^{(n)}(x, y) \\ = y/x \cdot \mathbb{P}(\tilde{Z}_n = y, \forall 0 \leq k \leq n : \tilde{Z}_k > 0 | Z_0 = x) \\ = y/x \cdot 2^{-n} \cdot \left(\binom{n}{1/2 \cdot (n+y-x)} - \binom{n}{1/2 \cdot (n-y-x)} \right).$$

Potentiale und Ladungen

Sei P im Folgenden transient, d. h.

$$0 < G(x, y) < \infty \quad \forall x, y \in E.$$

Def. Eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **G -integrierbar**, falls

$$\sum_{y \in E} G(x, y)|f(y)| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Das **Potential** $g = Gf$ von einem solchen f ist def. durch

$$g(x) := \sum_{y \in E} G(x, y)f(y) \quad x \in E.$$

Dann heißt f auch **Ladung** von g .

Lem. Für $g = Gf$ gilt:

- $f(x) = g(x) - Pg(x)$
- Ist $f \geq 0$, so ist g superharmonisch auf E und harmonisch auf $\{x \in E | f(x) = 0\}$.
- $P^n g \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ punktweise

Satz (**Riesz'sche Zerlegung**). Für jede superharmonische Funktion $u \geq 0$ existiert ein Potential $g = Gf$ und eine harmonische Funktion $h \geq 0$ mit $u = g + h$. Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweisidee. Setze $h(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} P^n u(x)$, $f(x) := u - Pu$. Die Eindeutigkeit folgt aus $P^n h = h$ und $P^n g \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Martin-Kompaktifizierung

Bsp. Sei P irreduzibel auf $E = E_0 \sqcup R$, wobei E_0 endlich ist und wir R als den Rand ansehen. Setze $\tilde{E} := E \cup \{\dagger\}$ und betrachte \tilde{P} mit

$$\tilde{P}(x, y) := P(x, y) \text{ für } x \in E_0, y \in E, \quad \tilde{P}(x, \dagger) := 1 \text{ für } x \in R \cup \{\dagger\}.$$

Für alle $r \in R$ ist dann $\tilde{G}(-, r)$ harmonisch auf E_0 . Man kann zeigen, dass jede harmonische Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig durch $f|_R$ festgelegt ist. Somit gilt

$$f = \sum_{s \in R} \tilde{G}(-, s) f(s),$$

da beide Funktionen harmonisch sind und auf R übereinstimmen.

Situation. Sei E abzählbar, P transient und es existiere $x_0 \in E$ mit $G(x_0, y) > 0$ für alle $y \in E$. Sei $N : E \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv.

Def. Der **Martin-Kern** ist dann die Abbildung

$$K(x, y) := G(x, y)/G(x_0, y).$$

Lem. $K(x, y) \leq F(x_0, x)^{-1}$ für alle $x, y \in E$

Def. Auf E ist eine Metrik ρ definiert durch

$$\rho(y, z) := |2^{-N(y)} - 2^{-N(z)}| + \sum_{x \in E} |K(x, y) - K(x, z)| F(x_0, x) 2^{-N(x)}.$$

Def. (E^*, ρ) sei die (Cauchy-)Vervollständigung von (E, ρ) . Der **Martin-Rand** ist $\partial E := E^* \setminus E$.

Bem. Der Martin-Rand besteht aus Äquivalenzklassen von Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit

- $N(x_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und
- $K(x, x_n)$ ist Cauchyfolge für alle $x \in E$.

Lem. Jede Folge in E hat eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist (und somit in E^* konvergiert).

Beweisidee. Diagonalfolgenargument

Kor. (E^*, ρ) ist kompakt.

Lem/Def. $K(x, -)$ ist gleichmäßig stetig auf E und lässt sich deswegen eindeutig auf E^* fortsetzen durch

$$K(x, \alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} K(x, \alpha_n) \quad \text{für } \alpha = [(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Lem. Sei $u \geq 0$ superharmonisch. Dann gilt:

- u ist Potential $\iff P^n u \rightarrow 0$ punktweise für $n \rightarrow \infty$
- $u \leq v$, v Potential $\implies u$ Potential
- $K(x, \alpha)$ ist für jedes $\alpha \in \delta E$ superharmonisch in x .

Satz (Martin-Darstellung). Für jede harmonische Funktion $h \geq 0$ existiert ein Maß $\mu_h(d\alpha)$ auf ∂E , sodass

$$h(x) = \int_{\partial E} K(x, \alpha) \mu_h(d\alpha).$$

Beweisskizze. Wähle eine Folge $\{h_n\}$ von Potentialen mit $h_n \uparrow h$. Sei f_n die Ladung zu h_n . Dann gilt

$$h_n(x) = \int_{E^*} K(x, y) \mu_n(dy)$$

wobei $\mu_n(\{y\}) := f_n(y)G(x_0, y)$ für $y \in E$ und $\mu_n(\partial E) := 0$. Nach dem Satz von Prokhorov (beachte: $\mu_n(E^*) = h_n(x_0) \leq h(x_0)$) existiert eine schwach konvergente Teilfolge $\mu_{n_k} \rightarrow \mu_h$ für ein Maß μ_h auf E^* . Mit der Harmonizität von h lässt sich zeigen, dass

$$\text{supp } \mu_h \subseteq \{\alpha \in \partial E \mid K(-, \alpha) \text{ ist harmonisch}\} \subseteq \partial E.$$

Kor. Jede superharmonische Funktion $u \geq 0$ lässt sich schreiben als

$$u(x) = \int_{E^*} K(x, y) \mu_u(dy)$$

mit einem Maß μ_u auf E^* .

Bem. Man kann zeigen: Die Martin-Darstellung wird eindeutig wenn man den **minimalen Martin-Rand**

$$\partial_m E := \{\alpha \in \partial E \mid K(-, \alpha) \text{ ist minimal harmonisch}\}$$

anstatt ∂E verwendet. Dabei heißt eine harmonische Funktion h *minimal harmonisch*, falls alle harmonischen Funktionen $v \leq h$ von der Form $v = c \cdot h$ mit $c \in \mathbb{R}$ sind.

Resultat. Für alle $A \subset \mathfrak{B}(\partial_m E)$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_\infty \in A \mid Z_0 = x\right) = \int_A K(x, \alpha) \mu_1(d\alpha).$$

Bem. Insbesondere $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_\infty \in A \mid Z_0 = x_0) = \mu_1(A)$

Bem. Sei $h > 0$ harmonisch mit $h(x_0) = 1$. Sei P_h die h -Transformation von P . Für den zugeh. Martin-Kern gilt dann $K_h(x, y) = K(x, y)/h(x)$. Es folgt

$$1 = \int_{\partial E} K_h(x, \alpha) \mu_h(d\alpha) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Somit stellt μ_h die konstante Funktion 1 bzgl. K_h dar. Mit dem Resultat folgt für die Markovkette $\{Z_n^h\}$ mit Übergangskern P_h :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^h = Z_\infty^h \in A \mid Z_0^h = x\right) = \int_A K_h(x, \alpha) \mu_h(d\alpha)$$

für alle $A \in \mathfrak{B}(\partial E)$. Für $h = K(-, \beta)$ mit $\beta \in \partial_m E$ kann man zeigen: $\mu_{K(-, \beta)} = \delta_\beta$. Somit ist

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^{K(-, \beta)} \in A \mid Z_0 = x_0\right) = \mathbb{1}\{\beta \in A\}.$$

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ die Markovkette auf \mathbb{N}_0^2 mit

$$p((x, y), (x+1, y)) = \frac{1}{2} = p((x, y), (x, y+1)).$$

Startpunkt ist $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Dann gilt

$$K((x, y), (m, n)) \sim 2^{x+y} \alpha_{m,n}^x (1 - \alpha_{m,n})^y$$

mit $\alpha_{m,n} := m/(m+n)$. Die Folge $\{K((x, y), (m_k, n_k))\}$ mit $(m_k, n_k) = Z_k$ konvergiert genau dann, falls $\{\alpha_{m_k, n_k}\}$ konvergiert. Diese Folgen bilden den Martin-Rand.