

# Zusammenfassung Modellkategorien

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

## Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Def. Eine (schwache) 2-Kategorie  $\mathbb{C}$  besteht aus

- einer Ansammlung  $\text{Ob}(\mathbb{C})$  von Objekten,
- für jedes Paar  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  von Objekten einer Kategorie

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{D} \\ & \mathcal{G} & \end{array} \right\},$$

- für jedes Tripel  $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$  von Objekten einem Funktor

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt  $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  einem Objekt  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ ,
- für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} : - \circ (- \circ -) \Rightarrow (- \circ -) \circ -,$$

wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (- \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})},$$

sodass folgende Kohärenzbedingungen erfüllt sind:

- Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathbb{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K(H(GF)) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (KH)(GF) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{G}}} ((KH)G)H \\ \downarrow K\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} & & \alpha_{\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}} \uparrow \\ K((HG)F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (K(HG))F \end{array}$$

- Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathbb{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{E}}} & (G \circ \text{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \\ & \searrow^{G\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}} & \swarrow_{\rho_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} \circ F} \\ & G \circ F & \end{array}$$

Bsp. • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie  $\mathcal{C}$  ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe  $\mathbb{R}$  mit  $\text{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$  und  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) := \text{Kat. der } B\text{-}A\text{-Bimoduln mit } N \circ M := N \otimes_B M$  für  $M \in \text{Hom}(A, B)$  und  $N \in \text{Hom}(B, C)$ . Dabei ist  $\text{Id}_A := A$ .

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann  $\otimes$  anstelle von  $\circ$  geschrieben.

Def. Sei  $S : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Ein **Ende**  $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  von  $S$  ist eine Familie  $\alpha_c : E \rightarrow S(c, c)$ ,  $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  von Morphismen in  $\mathcal{A}$ , sodass für alle  $(f : c \rightarrow c') \in \mathcal{C}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_c} \\ \searrow \alpha_{c'} \end{array} & S(c, c) \\ & & \downarrow S(\text{id}_c, f) \\ E & \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_{c'}} \\ \searrow \alpha_{c'} \end{array} & S(c', c') \\ & & \downarrow S(f, \text{id}_{c'}) \\ & & S(c, c') \end{array}$$

kommutiert, und  $E$  universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler **S-Keil**.

Notation.  $E = \int_{\mathcal{C}} S(c, c)$ .

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden:  $\lim F = \int_{\mathcal{C}} F(c)$ ; der Integrand ist  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ .

Bem. Das duale Konzept ist das eines **Anfangs** Koendes  $\int_{\mathcal{C}} S(c, c)$ .

Bsp. Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \cong \text{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini). Sei  $S : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d, c)} S(d, d, c, c) \cong \iint_{d, c} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und  $\int_{\mathcal{C}} S(d, d', c, c)$  für alle  $d, d' \in \mathcal{D}$  existieren.

Bsp. Sei  $R$  ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt  $*$ . Ein additiver Funktor  $R^{(\text{op})} \rightarrow \mathbf{Ab}$  ist nichts anderes als ein  $R$ -Linksmodul (bzw.  $R$ -Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Lem (Ninja-Yoneda-Lemma). Für jede Prägarbe  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  gilt

$$F \cong \int_{\mathcal{C}} F(c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei  $\mathbb{C}$  eine 2-Kategorie. Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$ . Eine **Adjunktion** von  $F \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  und  $G \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  ist geg. durch Morphismen  $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$  (genannt **Eins**) und  $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  (**Koeins**) mit  $G\epsilon \circ \eta G = \text{Id}_G$  und  $\epsilon F \circ F\eta = \text{Id}_F$ . Man notiert  $F \dashv G$ .

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren. Dann gilt  $F \dashv G$  genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\text{Hom}(F \circ -, -) \cong \text{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp.  $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein  $B$ - $A$ -Modul  $M$  ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn  $M$  als Rechts- $A$ -Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind  $\eta$  und  $\epsilon$  in  $F \dashv G$  sogar Isomorphismen, so heißt  $F \dashv G$  auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von  $F$  und  $G$  sowie einem der Morphismen  $\epsilon, \eta$ ) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

## Kan-Erweiterungen

Def. Sei  $\mathcal{A} \xleftarrow{T} \mathcal{M} \xrightarrow{K} \mathcal{C}$  ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE)  $(R, \epsilon)$  von  $T$  längs  $K$  besteht aus

- einem Morph.  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$
- einem 2-Morph.  $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$ ,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE  $(S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}, \eta : S \circ K \Rightarrow T)$  gibt es genau ein  $\sigma : S \Rightarrow R$  mit  $\epsilon \circ \sigma K = \eta$ . Notation:  $R = \text{Ran}_K(T)$

Bem. Es sind äquivalent: •  $(R, \epsilon)$  ist RKE von  $T$  längs  $K$

•  $\eta \mapsto \epsilon \circ \eta K : \text{Nat}(S, R) \rightarrow \text{Nat}(S \circ K, T)$  ist bij.  $\forall S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$

Bem. Es gilt  $R = \text{Ran}_K(T)$  genau dann, wenn es in  $S \in [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$  natürliche Isomorphismen  $\text{Nat}(S, R) \cong \text{Nat}(S \circ K, T)$  gibt.

Prop. RKEs sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bspe. • Die RKE eines bel. Morphismus  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  längs  $\text{Id}_{\mathcal{M}}$  existiert stets und ist gegeben durch  $(T, T \circ \text{Id}_{\mathcal{M}} \Rightarrow T)$ .

• In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\text{Ran}_K(T) = (\text{Hom}_M(K, T), \quad \text{ev} : \text{Hom}_M(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{1}$ ,  $*$   $\mapsto 1$  und  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von  $T$  längs  $K$  dasselbe wie ein Limes von  $T$ .

Thm. Seien  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  und  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren. Existiere für alle  $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  der Limes  $R(c) := \lim((f : c \rightarrow Km) \mapsto Tm)$ . Dabei ist die Indexkategorie des Limes die Kommat.  $\Delta(c) \downarrow K$ . Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ausdehnen und zwar zu einer RKE von  $T$  längs  $K$ .

Bem. Ist  $\mathcal{M}$  klein und  $\mathcal{C}$  lokal klein und ist  $\mathcal{A}$  vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle  $a \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  unter dem Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$  erhalten bleibt.

Thm. Sei  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Betrachte  $K^* : [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{M}, \mathcal{A}]$ .

- Wenn ein Funktor  $\text{Ran}_K : [\mathcal{M}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$  mit  $K^* \dashv \text{Ran}_K$  ex., so ist  $\text{Ran}_K(T)$  für alle  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  eine RKE von  $T$  längs  $K$ .
- Existiere für alle  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  eine RKE  $\text{Ran}_K(T)$ . Dann kann man die Zuordnung  $T \mapsto \text{Ran}_K(T)$  zu einem Rechtsadjungierten von  $K^*$  ausdehnen.

Thm. Sei  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$  in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- $G$  besitzt einen Linksadjungierten.
- $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}})$  existiert und  $G \circ \text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}}) = \text{Ran}_G(G \circ \text{Id}_{\mathcal{A}})$ .

In diesem Fall gilt  $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}}) \dashv G$  und  $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}})$  wird sogar von allen Morphismen  $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Y}$  bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

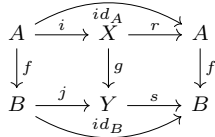
## Algebraische Strukturen in Kategorien

**Def.** Eine **Retrakt** ist ein Morphismus  $r : Y \rightarrow X$ , sodass ein Morphismus  $i : X \rightarrow Y$  mit  $r \circ i = \text{id}_X$  existiert. Sprechweise:  $X$  ist ein Retrakt von  $Y$  (vermöge  $i$ ).

**Bsp.** Ein Modul  $U$  ist genau dann Retrakt von einem Modul  $M$ , wenn  $U$  ein direkter Summand von  $M$  ist.

**Prop.** „ $-$  ist Retrakt von  $-$ “ ist eine reflexive und trans. Relation.

**Def.** Ein **Retrakt eines Morphismus**  $(X \xrightarrow{g} Y) \in \mathcal{C}$  ist ein Mor.  $f : A \rightarrow B$ , sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:



**Bem.** Ein Retrakt von  $g \in \text{Mor}(\mathcal{C})$  ist ein Retrakt von  $g \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$ .

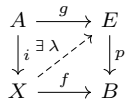
**Prop.** • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.

• Sei  $f \circ g = \text{id}$ . Dann ist  $f$  ein Retrakt von  $g \circ f$ .

**Prop.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Dann ist die Klasse  $\{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$  abgeschlossen unter Retrakten.

**Def.** Sei  $i : A \rightarrow X$  und  $p : E \rightarrow B$ . Dann werden als äq. definiert:

- $p$  ist  **$i$ -injektiv** •  $i$  ist  **$p$ -projektiv** •  $i \sqsupseteq p$
- $i$  hat die **Linkshochhebungseigenschaft** (LHHE) bzgl.  $p$
- $p$  hat die **Rechtshochhebungseigenschaft** (RHHE) bzgl.  $i$
- Für alle  $f, g$  wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales  $\lambda$ , sodass die Dreiecke kommutieren:



**Bsp.** Wegeliftung aus der Topologie:  $i : \{0\} \rightarrow [0, 1]$  erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen  $\pi : E \rightarrow B$ .

**Bsp.** Ein Objekt  $P$  einer ab. Kat.  $\mathcal{A}$  ist genau dann **projektiv**, wenn  $(0 \rightarrow P)$  die LHHE bzgl. aller Epis in  $\mathcal{A}$  hat. Dual ist  $I \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  injektiv g.d.w. alle Monos in  $\mathcal{A}$  die LHHE bzgl.  $(I \rightarrow 0)$  besitzen.

**Bsp.** In **Set** gilt: Alle Inj. haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

**Lem (Retrakt-Argument).** Sei  $f = q \circ j$ .

- Ist  $f$   $q$ -projektiv ( $f \sqsupseteq q$ ), so ist  $f$  ein Retrakt von  $j$ .
- Ist  $f$   $j$ -injektiv ( $j \sqsupseteq f$ ), so ist  $f$  ein Retrakt von  $q$ .

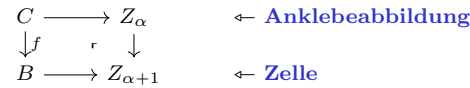
## Zellenkomplexe

**Def.** Sei  $\lambda$  eine Ordinalzahl. Eine  **$\lambda$ -Sequenz** in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein kolimesbewahrender Funktor  $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$  (wobei man  $\lambda$  als Präordnungskategorie aller  $\beta < \lambda$  auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus  $X_0 \rightarrow \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$ .

**Bem.** Kolimesbewahrung bedeutet:  $\text{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha = X_\beta$  für alle  $\beta < \lambda$ .

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine kovollständige Kategorie,  $I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$  eine Menge.

- Ein **relativer  $I$ -Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer  $\lambda$ -Sequenz  $Z$ , sodass  $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n$  mit  $\alpha + 1 < \lambda$  ein Pushoutdiagramm



mit  $f \in I$  existiert. Sprechweise: „ $Z_{\alpha+1}$  entsteht aus  $Z_\alpha$ , indem wir  $B$  längs  $C$  ankleben.“

- Ein Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  heißt  **$I$ -Zellenkomplex**, wenn der Morph.  $0 \rightarrow A$  aus dem initialen Obj. ein relativer  $I$ -Zellenkomplex ist.

**Bsp.** CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind  $I$ -Zellenkomplexe mit  $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geq 0\}$  (und  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ ).

**Bspe.** • Identitäten  $A \rightarrow A$  sind relative  $I$ -Zellenkomplexe.

- Das initiale Objekt ist ein absoluter  $I$ -Zellenkomplex.

**Lem.** Sei  $Z : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$  eine  $\lambda$ -Sequenz. Sei jeder Mor.  $Z_\beta \rightarrow Z_{\beta+1}$  ( $\beta + 1 < \lambda$ ) ein Pushout eines Morphismus aus  $I$  oder ein Iso. Dann ist die transfinite Komposition von  $Z$  ein  $I$ -Zellenkomplex.

**Thm.** Die Klasse der relativen  $I$ -Zellenkomplex ist abgeschl. unter: • transfiniten Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukten

## Faktorisierungssysteme

**Def.** Eine Unterkat.  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$  heißt **links-saturiert**, falls  $\mathcal{L}$  abgeschl. ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

**Lem.** Sei  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$  links-saturiert. Dann ist  $\mathcal{L}$  unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

**Bsp.** Sei  $R \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ . Dann ist die Unterkategorie  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$  mit  $\text{Mor}(\mathcal{L}) := \square R := \{i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall r \in R : i \sqsupseteq r\}$  links-saturiert.

**Def.** •  $L \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  heißt **proj. abgeschlossen**, falls  $L \supseteq \square(L^\square)$ .

- $R \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  heißt **injektiv abgeschlossen**, falls  $R \supseteq (\square L)^\square$ .

**Prop.** •  $\square(L^\square)$  ist die projektive Hülle von  $L$ , d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschl. ist und  $L$  umfasst.

- Die projektive Hülle von  $L$  ist links-saturiert. Ist  $L$  schon projektiv abgeschlossen, so ist  $L$  insbesondere links-saturiert.

**Def.** • Ein Paar  $(L, R)$  von Klassen von Morphismen von  $\mathcal{C}$  **faktorisiert**  $\mathcal{C}$ , falls  $\forall f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) : \exists i \in L, p \in R : f = p \circ i$ .

- Ein faktorisiertes Paar  $(L, R)$  heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls  $L = \square R$  und  $R = L^\square$ .
- Ein SFS  $(L, R)$  heißt **orth. Faktorisierungssystem**, falls jedes  $i \in L$  die eindeutige LHHE bzgl. allen  $p \in R$  erfüllt.

**Prop.** Sei  $(L, R)$  faktorisierend. Dann ist  $(L, R)$  genau dann ein SFS, wenn  $L \sqsupseteq R$  und  $L$  und  $R$  unter Retrakten abgeschlossen sind.

**Bsp.** ( $\{\text{Surjektionen}\}, \{\text{Injektionen}\}$ ) ist ein (S)FS in **Set**

## Modellkategorien

**Motto.** Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

**Def.** Eine Klasse  $W \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition  $h = g \circ f$  in  $\mathcal{C}$  gilt: Liegen zwei der drei Morphismen  $f, g, h$  in  $W$ , so auch der dritte.

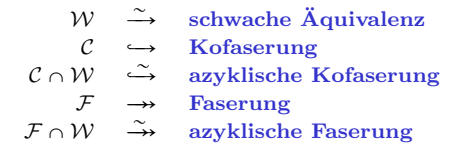
**Def.**  $W \subseteq \mathcal{C}$  wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls  $W$  die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

**Bsp.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Dann ist  $\mathcal{W} := F^{-1}(\{\text{Isos in } \mathcal{D}\})$  eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

**Def.** Ein Tripel  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  von Unterkategorien einer Kategorie  $\mathcal{M}$  heißt **Modellstruktur** auf  $\mathcal{M}$ , falls sowohl  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  als auch  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  schwache Faktorisierungssysteme sind und  $\mathcal{W}$  die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

**Def.** Eine bivollständige Kategorie  $\mathcal{M}$  zusammen mit einer Modellstruktur  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  heißt eine **Modellkategorie**.

**Sprechweise.** Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:



**Bem.** Ist  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  eine Modellstruktur auf  $\mathcal{M}$ , so ist  $(\mathcal{W}^{\text{op}}, \mathcal{F}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}})$  eine Modellstruktur auf  $\mathcal{M}^{\text{op}}$ .

**Bem.** Wegen  $\mathcal{C} = \square(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  bzw.  $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^\square$  ist das Datum  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  überbestimmt.

**Bsp.** Sei  $\mathcal{M}$  bivollständig. Sei  $\mathcal{W} := \mathcal{C} := \{\text{Isos in } \mathcal{M}\}$ . Dann wird  $\mathcal{M}$  mit  $\mathcal{F} := \mathcal{M}$  eine Modellkategorie.

**Prop.** In einer Modellkategorie sind  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  links-saturiert.

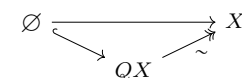
**Lem.**  $\mathcal{W}$  enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

**Notation.** Das initiale Objekt von  $\mathcal{M}$  wird mit  $\emptyset$ , das terminale Objekt mit  $*$  bezeichnet.

**Def.** • Ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  heißt **kofasernd**, falls  $\emptyset \rightarrow X$  eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung  $q : QX \xrightarrow{\sim} X$  mit  $QX$  kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von  $X$ .

- Dual heißt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  **fasernd**, falls  $X$  in  $\mathcal{M}^{\text{op}}$  kofasernd ist und  $X \xrightarrow{\sim} RX$  mit  $RX$  fasernd heißt **fasernder Ersatz** von  $X$ .

**Bsp.** Sei  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  beliebig. Dann faktorisiere  $\emptyset \rightarrow X$  wie folgt:



Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz  $QX$  für  $X$ .  
Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz  $RX$  für  $X$ .

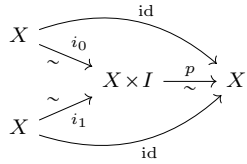
**Prop.** Seien  $q : QX \xrightarrow{\sim} X$  und  $q' : Q'X \xrightarrow{\sim} X$  zwei kofasernde Approximationen von  $X$ . Dann existiert eine schwache Äquivalenz  $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$  mit  $q' \circ \xi = q$ .

**Def.** Ein Obj.  $X$  heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

**Prop.** Für alle  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  sind  $RQX$  und  $QRX$  schwach äquivalent und beide bifasernd.

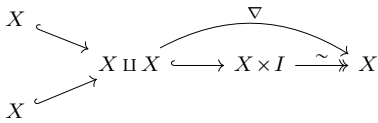
**Lem** (Ken Brown). Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Funktor,  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie,  $\mathcal{N}$  besitze eine Unterkat.  $\mathcal{W}'$  schwacher Äquivalenzen. Wenn  $F$  azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach  $\mathcal{W}'$  abbildet, so bildet  $F$  alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach  $\mathcal{W}'$  ab.

**Def.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie. Ein **Zylinderobjekt**  $X \times I$  zu einem  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  ist ein Obj. zusammen mit Morphismen wie folgt:



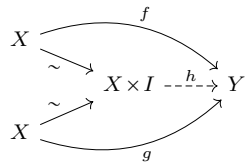
Der Zylinder  $X \times I$  heißt **gut**, falls  $X \amalg X \rightarrow X \times I$  eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls  $p : X \times I \rightarrow X$  eine azyklische Faserung ist.

**Bem.** Sei die Kodiagonale  $\nabla : X \amalg X \rightarrow X$  wie folgt faktorisiert:



Dann erhalten wir ein (sehr gutes) Zylinderobjekt  $X \times I$  für  $X$ .

**Def.** Zwei Morphismen  $f, g : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{M}$  heißen **links-homotop** (notiert  $f \sim^l g$ ), falls ein Zylinder  $X \times I$  und ein Diagramm der Form



existiert. Wir definieren  $\pi^l(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) / \langle \sim^l \rangle$ , wobei  $\langle \sim^l \rangle$  die von der symmetrischen, refl. Relation  $\sim^l$  erzeugte Äq'-relation ist. Die Homotopie heißt (sehr) gut, wenn der Zylinder  $X \times I$  es ist.

**Beob.** Sei  $X \amalg X \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} X$  irgendein Zylinderobjekt. Faktorisiere  $i = q \circ i'$  in Kofaserung und azyklische Faserung. Dann ist auch

$$X \amalg X \xrightarrow{i'} X' \xrightarrow{pq} X$$

ein Zylinderobjekt, sogar ein gutes. Ebenso kann man  $p$  faktorisieren und ein anderes Zylinderobjekt erhalten.

**Lem.** Sei  $X$  kofasernd,  $X \amalg X \rightarrow X \times I \rightarrow X$  ein gutes Zylinderobj. Dann sind  $i_{0,1} : X \rightarrow X \amalg X \rightarrow X \times I$  azyklische Kofaserungen.

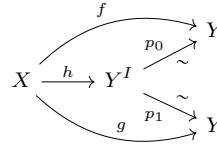
**Lem.** Sei  $h : f \simeq^l g$ . Dann:  $f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$ .

**Def.** Ein **Pfadobjekt**  $X^I$  ist eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow{i} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

des Diagonalmorph.  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ . Das Pfadobjekt  $X^I$  heißt gut, wenn  $p$  eine Faserung und sehr gut, wenn zus.  $i$  eine Kofaserung ist.

**Def.** Eine **Rechtshomotopie**  $h : f \simeq^r g$  ist ein k. D. der Form



**Bem.** Ein Pfadobj. in  $\mathcal{M}$  ist dasselbe wie ein Zylinderobj. in  $\mathcal{M}^{\text{op}}$ .

**Lem.** Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  und  $e : W \rightarrow X, d : Y \rightarrow Z$ .

- $\exists h : f \simeq^l g \iff \exists h' : f \simeq^{l, \text{gut}} g$ .
- Sei  $Y$  fasernd. Dann:  $\exists h : f \simeq^{l, \text{gut}} g \iff \exists h' : f \simeq^{l, \text{sehr gut}} g$
- $\exists h : f \simeq^l g \implies \exists h' : d \circ f \simeq^l d \circ g$
- $\exists h : f \simeq^{l, \text{sehr gut}} g \implies \exists h' : f \circ e \simeq^{l, \text{sehr gut}} g \circ e$
- Sei  $X$  kofasernd. Dann ist  $\simeq^l$  eine Äq'-relation auf  $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ .

**Kor.** Sei  $Y$  fasernd. Dann induziert Komposition eine Abbildung

$$\pi^l(X, Y) \times \pi^l(W, X) \rightarrow \pi^l(W, Y), \quad ([g], [f]) \mapsto [g \circ f].$$

**Prop.** Seien  $f, g : X \rightarrow Y$ .

- Sei  $X$  kofasernd. Dann:  $f \simeq^l g \implies f \simeq^r g$
- Sei  $Y$  fasernd. Dann:  $f \simeq^l g \iff f \simeq^r g$

**Notation.** Wenn  $X$  kofasernd und  $Y$  fasernd ist, schreibt man

$$\pi(X, Y) := \pi^l(X, Y) = \pi^r(X, Y).$$

**Thm.** Sei  $X$  kofasernd. Sei  $p : Z \xrightarrow{\sim} Y$  eine azyklische Faserung. Dann ist  $p_* : \pi^l(X, Z) \rightarrow \pi^l(X, Y), [f] \mapsto [p \circ f]$  eine Bijektion.

**Thm** (Whitehead).

Für einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  zw. bifasernden Objekten gilt

$$f \in \mathcal{W} \iff f \text{ ist eine Homotopieäquivalenz} \\ \iff \exists g : Y \rightarrow X : g \circ f \simeq \text{id}_X \wedge f \circ g \simeq \text{id}_Y.$$

**Lem.** Sei  $f : X \rightarrow Y$ . Seien  $RX$  und  $RY$  fixierte fasernde Approx. an  $X$  bzw.  $Y$ . Dann hängt  $Rf : RX \rightarrow RY$  bis auf Rechts- und auch Linkshomotopie nur von der Rechtshomotopieklasse von  $r \circ f$  ab.

**Achtung.** I. A. ist  $f \mapsto R(f)$  nicht funktoriell.

## Die Homotopiekategorie einer Modellkategorie

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  ein Kategorie,  $S \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$  eine Klasse von Morphismen. Die **Lokalisierung**  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  von  $\mathcal{C}$  ist eine Kategorie, die folgende 2-universelle Eigenschaft erfüllt:

- $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$  schickt Morphismen aus  $S$  aus Isos.
- Für jede Kategorie  $\mathcal{D}$  ist  $\gamma^* : [\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{D}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{S \rightarrow \text{Isos}}$  eine Kategorienäquivalenz.

**Bem.** Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt Lokalisierung von Kategorien.

**Def.** Die **Homotopiekategorie**  $\text{Ho} \mathcal{M}$  einer Modellkategorie  $\mathcal{M}$  ist die Lokalisierung von  $\mathcal{M}$  an der Klasse der schwachen Äquivalenzen.

**Konstr.** Ganz explizit:

$$\text{Ob}(\text{Ho} \mathcal{M}) := \text{Ob}(\mathcal{M})$$

$$\text{Hom}_{\text{Ho} \mathcal{M}}(X, Y) := \pi(RQX, RQY)$$

Nach einem früheren Lemma ist die Komposition  $([f], [g]) \mapsto [f \circ g]$  wohldefiniert. Der Funktor  $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho} \mathcal{M}$  ist gegeben durch

$$X \mapsto X, \quad f \mapsto [RQf].$$

**Lem.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{M}$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{W} \iff Qf \in \mathcal{W} \iff RQf \in \mathcal{W}$ .

**Lem.**  $\gamma$  wie definiert ist ein Funktor.

**Lem.**  $f \in \mathcal{W} \iff \gamma(f)$  ist ein Iso.

**Lem.** Sei  $X$  kofasernd und  $Y$  fasernd. Dann ist die Abbildung

$$\pi(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho} \mathcal{M}}(X, Y), \quad [f] \mapsto [RQf]$$

eine Bijektion.

**Lem.** Ist  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor, der schwache Äq. auf Isos schickt, dann identifiziert  $F$  links- bzw. rechtshomotope Morphismen.

**Lem.** Jeder Morphismus in  $\text{Ho} \mathcal{M}$  ist Komposition von Morphismen der Form  $\gamma(f), f \in \text{Mor}(\mathcal{M})$  und der Form  $\gamma(f)^{-1}, f \in \mathcal{W}$ .

**Lem.** Obige Konstruktion erfüllt die geforderte univ. Eigenschaft.

**Lem.** Sei  $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$  die volle Unterkategorie der kofasernden Objekte und  $F : \mathcal{M}_c \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isos schickt. Dann identifiziert  $F$  rechtshomotope Morphismen.

**Thm.** Ein Morphismus  $p : Z \rightarrow Y$  zw. fasernden Objekten ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn  $p_* : \pi(X, Z) \rightarrow \pi(X, Y)$  bijektiv ist für alle kofasernden Objekte  $X \in \mathcal{M}$ .

**Beob.** Sei  $X$  kofasernd und  $Y$  fasernd. Dann ist  $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) / \sim$ .

**Def.** Eine Klasse  $W \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  besitzt die **2-aus-6-Eigenschaft**, wenn für alle Folgen von Morphismen

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} K \quad \in \mathcal{C}$$

gilt: Wenn  $v \circ u$  und  $w \circ v$  aus  $W$  sind, so auch  $u, v, w$  und  $w \circ v \circ u$ .

**Beob.** Die Klasse der Isomor. besitzt die 2-aus-6-Eigenschaft.

**Kor.** Die Klasse der schwache Äquivalenzen in einer Modellkategorie besitzt die 2-aus-6-Eigenschaft.

# Klassen von Modellkategorien

## Lokal präsentierbare Kategorien

**Motto.** Eine lokal präsentierbare Kategorie ist eine große Kategorie, welche erzeugt wird von kleinen Objekten unter kleinen Kolimiten.

**Def.** Eine  $\infty$ -große Kardinalzahl  $\kappa$  heißt **regulär**, wenn die Vereinigung von weniger als  $\kappa$  vielen Mengen, die alle weniger als  $\kappa$ -viele Elem. enthalten, selbst weniger als  $\kappa$ -viele Elemente enthält.

*Bem.* Zu jeder Kardinalzahl  $\lambda$  existiert ein reguläres  $\kappa$  mit  $\lambda \leq \kappa$ .

**Def.** Sei  $\kappa$  eine Kardinalzahl. Eine Kategorie heißt  **$\kappa$ -klein**, falls sie nur  $\kappa$ -viele Morphismen besitzt.

*Bem.* Sei  $\kappa$  regulär. Dann ist eine Kat. bereits dann  $\kappa$ -klein, falls sie nur  $\kappa$ -viele Objekte besitzt und alle Hom-Mengen  $\kappa$ -klein sind.

**Def.** Eine Kategorie heißt  **$\kappa$ -filtriert**, wobei  $\kappa$  eine reguläre Kardinalzahl ist, wenn jedes  $\alpha$ -kleine Diagramm in der Kategorie einen Kokegel besitzt, wobei  $\alpha < \kappa$ .

**Def.** Eine teilweise geordnete Menge  $(I, \leq)$  heißt  **$\alpha$ -gerichtet**, falls die zugehörige Kategorie  $\alpha$ -filtriert ist, d. h. jeweils weniger als  $\alpha$ -viele Elemente haben eine obere Schranke.

*Bem.* Sei  $\lambda \geq \kappa$ . Dann ist jede  $\lambda$ -filtrierte Kategorie auch  $\kappa$ -filtriert.

**Def.** Ein Objekt  $X$  einer Kat.  $\mathcal{C}$  heißt  **$\kappa$ -kompakt** oder  **$\kappa$ -klein**, wenn  $\text{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  mit  $\kappa$ -filtrierten Kolimiten vertauscht:

$$\text{colim}_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_i) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim}_i T_i)$$

für alle  $\kappa$ -filtrierte Diagramme  $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$ .

**Def.** Ein Objekt heißt genau dann **klein**, wenn es  $\kappa$ -kompakt ist für irgendeine reguläre Kardinalzahl  $\kappa$ .

**Bspe.** • Jede endliche Menge ist  $\aleph_0$ -kompakt in **Set**.

- Jeder endlich-dim. VR ist  $\aleph_0$ -kompakt in **Vect**( $\mathbb{R}$ ).
- Jeder endlich-präsentierbare Modul ist  $\aleph_0$ -kompakt in **Mod**( $R$ ).
- Unendliche Mengen sind nicht  $\aleph_0$ -kompakt in **Set**.
- Jeder nicht diskrete topologische Raum ist nicht  $\aleph_0$ -kompakt.
- **Set** ist lokal  $\aleph_0$ -präsentierbar mit  $S = \{\heartsuit\}$ .
- **Mod**( $R$ ) ist lokal  $\aleph_0$ -präsentierbar mit  $S = \{R^n / \text{im}(A) \mid n \geq 0, A \in R^{n \times m}, m \geq 0\}$

**Def.** Eine **lokal  $\kappa$ -präsentierbare Kategorie** ist eine lokal kleine und kovollständige Kategorie, sodass eine Menge  $S \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$  von  $\kappa$ -kompakten Objekten existiert, sodass jedes Objekt aus  $\mathcal{C}$  kleiner Kolimes von Objekten aus  $S$  ist.

**Def.** Eine Kategorie heißt genau dann **lokal präsentierbar**, wenn sie lokal  $\kappa$ -präsentierbar für eine reguläre Kardinalzahl  $\kappa$  ist.

**Lem.** Ist  $\mathcal{C}$  lokal präsentierbar, so auch  $\mathcal{C}/X$  mit  $X \in \text{Ob}(X)$ .

**Bspe.** • **sSet** ist lokal präsentierbar.

- Sei  $\mathcal{C}$  klein. Dann ist **PSh**( $\mathcal{C}$ ) =  $[C^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$  lokal präsentierbar.

- **FinSet** ist nicht lokal präsentierbar (weil nicht kovollständig)

**Fun Fact.** Sei  $\mathcal{C}$  lokal präsentierbar. Wenn auch  $C^{\text{op}}$  lokal präsentierbar ist, dann ist  $\mathcal{C}$  die zu einer Quasiordnung gehörige Kategorie!

**Lem.** Sei  $X : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$  ein Funktor, wobei  $\mathcal{I}$   $\alpha$ -filtriert und  $\mathcal{J}$   $\alpha$ -klein. Dann ist der kanonische Isomorphismus  $\text{colim}_i \lim_j X(i, j) \rightarrow \lim_j \text{colim}_i X(i, j)$  eine Bijektion.

**Bsp.**  $\alpha$ -kleine Kolimiten  $\alpha$ -kompakter Obj. sind wieder  $\alpha$ -kompakt.

## Kombinatorische Modellkategorien

**Lem (Kleines-Objekt-Argument).**

Sei  $\mathcal{C}$  lokal präsentierbar,  $\mathcal{I} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$  eine Menge,  $\text{Cell}(\mathcal{I})$  die Unterkat. der relativen  $\mathcal{I}$ -Zellenkomplexe und  $\text{Cof}(\mathcal{I})$  die Unterkat. der Retrakte von  $\text{Cell}(\mathcal{I})$ . Dann ist  $(\text{Cof}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^{\square})$  ein SFS.

**Def.** • Eine Modellkategorie  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  heißt **kofasernd erzeugt**, wenn Mengen  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \text{Mor}(\mathcal{M})$  mit  $\mathcal{C} = \text{Cof}(\mathcal{I})$  und  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \text{Cof}(\mathcal{J})$  existieren.

- Lokal präsentierbare und kofasernd erzeugte Modellkategorien heißen **kombinatorisch**.

**Sprechweise.** Die Kof. in  $\mathcal{I}$  heißen **erzeugende Kofaserungen**, die in  $\mathcal{J}$  **azyklische erzeugende Kofaserungen**.

**Satz.** Sei  $\mathcal{M}$  eine lokal präsentierbare Kategorie. Sei  $\mathcal{W} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{M})$  eine Unterkat. schw. Äquivalenzen. Seien  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{M})$  Mengen. Dann sind  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  genau dann erzeugende (azyklische) Kofaserungen einer Modellstruktur auf  $\mathcal{M}$ , falls

- $\text{Cell}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{W}$  (Azyklizität)
- $\mathcal{I}^{\square} = \mathcal{J}^{\square} \cap \mathcal{W}$  (Kompatibilität)

## Eigentliche Modellkategorien

**Def.** Eine Modellkategorie  $\mathcal{M}$  heißt **linkseigentlich**, falls für alle Pushouts der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} r \\ \downarrow \\ \end{array}$$

auch der Morphismus  $g : X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz ist.  $\mathcal{M}$  heißt **rechtseigentlich**, falls  $\mathcal{M}^{\text{op}}$  linkseigentlich ist, d. h. Pullbacks schwacher Äquivalenzen längs Faserungen wieder schwache Äquivalenzen sind.

**Bsp.** Eine Modellkategorie, in der jedes Objekt kofasernd ist, ist linkseigentlich.

**Def.**  $\mathcal{M}$  heißt **eigentlich**, falls  $\mathcal{M}$  links- und rechtseigentlich ist.

**Prop.** In jeder Modellkategorie ist der Pushout einer schwachen Äquivalenz zwischen kofasernden Objekten längs Kofaserungen wieder eine schwache Äquivalenz.

*Bem.* Gute Homotopien kann man längs Kofaserungen erweitern:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & Y^I \\ \downarrow i & \nearrow \bar{h} & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Prop.** Eine Modellkategorie  $\mathcal{M}$  ist genau dann links-eigentlich, wenn für alle Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{i} & C & \xrightarrow{k} & B \\ \sim \downarrow f & & \sim \downarrow g & & \sim \downarrow h \\ A & \xleftarrow{j} & C & \xrightarrow{l} & B \end{array}$$

auch der ind. Mor.  $A \cup_C B \rightarrow A' \cup_{C'} B'$  eine schwache Äq. ist.

## Quillen-Adjunktionen

**Motto.** Wir wollen Modellstrukturen und -kategorien vergleichen.

**Def.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie,  $\mathcal{H}$  eine beliebige Kategorie. Ein Funktor  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  heißt **homotopisch**, falls  $F$  die schwachen Äquivalenzen in  $\mathcal{M}$  auf Isomorphismen in  $\mathcal{H}$  abbildet.

*Bem.* Homotopische Funktoren faktorisieren über  $\mathcal{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ .

**Bsp.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Funktor zw. Modellkategorien, der schwache Äquivalenzen erhält. Dann ist  $\delta \circ F : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$  homotopisch, wobei  $\delta : \mathcal{N} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$  die Lokalisierung ist.

*Bem.* Solch ein Funktor  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  induziert einen Funktor  $\text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$ .

**Def.** Ein **linksabgeleiteter Funktor** eines Funktors  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  ist ein Funktor  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}$  zusammen mit einer natürlichen Transformation  $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$ , sodass für alle weiteren Funktoren  $G : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}$  und nat. Transformationen  $\xi : G \circ \gamma \Rightarrow F$  genau eine natürliche Transformation  $\nu : G \Rightarrow \mathbb{L}F$  existiert mit  $\xi = \mu \circ \nu$ , d. h.  $\text{Nat}(G, \mathbb{L}F) \cong \text{Nat}(G \circ \gamma, F)$  ist für alle  $G$  eine Bijektion, d. h. eine Linksableitung von  $F$  ist nichts anderes als eine Rechts-Kan-Erweiterung von  $F$  längs  $\gamma$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{F} & \mathcal{H} \\ \downarrow \gamma & \nearrow \mathbb{L}F & \\ \text{Ho}(\mathcal{M}) & & \end{array}$$

Analog ist eine **Rechtsableitung**  $\mathbb{R}F$  von  $F$  eine Links-Kan-Erweiterung von  $F$  längs  $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{M})$ .

**Satz.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  ein Funktor, der azyklische Kofaserungen zwischen kof. Obj. auf Isomorphismen abbildet. Dann existiert  $\mathbb{L}F$  und  $\mu_X : \mathbb{L}F(X) \rightarrow F(X)$  ist ein Iso für alle kofasernden  $X$ .

*Konstr.* Sei  $h\mathcal{M}_c$  die volle Unterkategorie der kof. Objekte von  $\mathcal{M}$  modulo Rechts-Homotopie. Betrachte die Komposition

$$\mathcal{M} \xrightarrow{Q} h\mathcal{M}_c \xrightarrow{F_*} \mathcal{H}.$$

Dabei ist  $Q$  der kofasernde Ersatz und  $F_*$  wird induziert von  $F$ , da  $F$  homotope Morphismen identifiziert. Nach Ken Brown bildet die Komposition schwache Äquivalenzen auf Isos ab und induziert daher den gesuchten Funktor  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\mathbb{L}F \circ \gamma = F_* \circ Q$ . Definiere  $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \rightarrow F$  durch  $\mu_X := F(q : QX \rightarrow X)$  für  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ . Falls  $X$  selbst kofasernd ist, so ist  $q$  eine schwache Äquivalenz zw. kofasernden Objekten und somit  $\mu_X = F(q)$  ein Isomorphismus.

**Def.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Funktor zwischen Modellkategorien. Eine **totale Linksableitung**  $\mathbb{L}F$  ist ein Funktor  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$ , sodass  $\mathbb{L}F$  die Linksableitung von  $\delta \circ F$  ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{F} & \mathcal{N} \\ \downarrow \gamma & \nearrow & \downarrow \delta \\ \text{Ho}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mathbb{L}F} & \text{Ho}(\mathcal{N}) \end{array}$$

Ein Funktor  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  bilde azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten auf schwache Äquivalenzen ab. Dann existiert seine totale Linksableitung  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$ .

**Def.** Eine Adjunktion  $F : \mathcal{M} \xrightarrow[\perp]{} \mathcal{N} : U$  von Modellkategorien heißt **Quillen-Adjunktion**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $F$  erhält Kofaserungen und  $U$  erhält Faserungen,
- $F$  erhält Kofaserungen und azyklische Kofaserungen,
- $U$  erhält Faserungen und azyklische Faserungen,
- $F$  erhält azyklische Kofaserungen und  $U$  azyklische Faserungen.

*Bem.* Die Äquivalenz folgt aus  $F i \lrcorner p \iff i \lrcorner U p$ .

**Def.** Eine Quillen-Adj.  $(F, U)$  heißt **Quillen-Äquivalenz**, falls  $\forall X \in \mathcal{M}_c, Y \in \mathcal{N}_f : (FX \rightarrow Y) \in \mathcal{W} \iff (X \rightarrow UY) \in \mathcal{W}$ .

**Satz.** Sei  $(F, U)$  eine Quillenadjunktion. Dann existieren  $\mathbb{L}F, \mathbb{R}U$  und bilden eine Adjunktion  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \text{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbb{R}U$ . Ist  $(F, U)$  sogar eine Quillenäquivalenz, so ist  $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$  eine Adjunktion aus Äquivalenzen.

**Kor.** Quillenäq. Modellkat'n haben äquivalente Homotopiekat'n.

**Prop.** Für eine Quillenadjunktion  $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$  sind äquivalent:

- $(F, U)$  ist eine Quillenäquivalenz
- $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$  ist eine Adjunktion von Äquivalenzen
- $F$  reflektiert schw. Äq'n zw. kof. Objekten und die Komposition  $FQY \xrightarrow{F(qUY)} FUY \xrightarrow{\simeq} Y$  ist eine schw. Äq. für alle fas.  $Y$ .
- $U$  reflektiert schw. Äq'n zw. fas. Objekten und die Komposition  $X \xrightarrow{\eta} UFX \xrightarrow{U(rFX)} URFX$  ist eine schw. Äq. für alle kof.  $X$ .

Falls  $U$  schw. Äq'n in  $\mathcal{N}$  erzeugt, dann ist auch äquivalent:

- $\eta : X \rightarrow UFX$  ist eine schwache Äq. für alle kofasernden  $X$ .

Falls  $F$  schw. Äq'n in  $\mathcal{M}$  erzeugt, dann ist auch äquivalent:

- $\eta : X \rightarrow UFX$  ist eine schwache Äq. für alle kofasernden  $X$ .

**Def.** Sei  $f : A \rightarrow B$  ein Mor. in der Modellkat.  $\mathcal{M}$ . Dieser induziert Funktoren  $f^* : B/\mathcal{M} \rightarrow A/\mathcal{M}$  und  $f_* : \mathcal{M}/A \rightarrow \mathcal{M}/B$ . Der Funktor  $f^*$  besitzt einen Linksadj.  $f_! : A/\mathcal{M} \rightarrow B/\mathcal{M}$ , der durch Pushout entlang  $f$  geg. ist, und  $f_*$  besitzt einen Rechtsadj.  $f^! : \mathcal{M}/B \rightarrow \mathcal{M}/A$ .

**Prop.**  $\mathcal{M}$  ist genau dann linksseitlich, wenn  $(f_!, f^*)$  eine Quillenadjunktion ist und genau dann rechtsseitlich, wenn  $(f_*, f^!)$  eine Quillenadjunktion ist für alle schwachen Äquivalenzen  $f$ .

**Satz.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$  eine Adj. von einer komb. Modellkat.  $\mathcal{M}$  mit erz. Kofaserungen  $I$  und erz. azyklischen Kofaserungen  $J$  und einer lokal präsentierbaren Kategorie  $\mathcal{N}$ . Der Funktor  $U$  erzeuge schwache Äquivalenzen in  $\mathcal{N}$  (d. h. wir nennen  $f \in \text{Mor}(\mathcal{N})$  eine schwache Äquivalenz, falls  $U(f)$  eine schwache Äquivalenz ist). Dann wird  $\mathcal{N}$  eine Modellkategorie mit erzeugenden Kofaserungen  $FI$  und erzeugenden azyklischen Kofaserungen  $FJ$ , falls gilt: Jeder relative  $FJ$ -Zellenkomplex ist eine schwache Äquivalenz (d. h.  $U(\text{Cell}(FJ)) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ ). Bezüglich dieser Modellstruktur auf  $\mathcal{N}$  wird  $(F, U)$  zu einer Quillenadjunktion.

## Scheibenkategorien als Modellkategorien

**Lem.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie,  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  ein Objekt. Dann sind die Scheibenkategorien  $X/\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}/X$  Modellkat'n, wobei die Modellstruktur vom Vergissfunktor  $U : X/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  bzw.  $U : \mathcal{M}/X \rightarrow \mathcal{M}$  erzeugt wird, d. h. ein Mor.  $f$  ist genau dann eine Faserung/Kofaserung/schwache Äquivalenz, wenn  $U(f)$  es ist.

**Lem.** • Ist  $\mathcal{M}$  links- oder rechtsseitlich, so auch  $\mathcal{M}/X$  u.  $X/\mathcal{M}$ .

• Ist  $\mathcal{M}$  eigentlich, so auch  $\mathcal{M}/X$  und  $X/\mathcal{M}$ .

• Ist  $\mathcal{M}$  kofasernd erzeugt, so auch  $\mathcal{M}/X$ .

• Ist  $\mathcal{M}$  kombinatorisch, so auch  $\mathcal{M}/X$ .

## Monoidale Modellkategorien

**Def.** Eine **monoidale Kategorie** ist eine Kategorie  $\mathcal{C}$  zusammen mit einem Bifunktor  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , einem Objekt  $\mathbb{1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , natürlichen Isomorphismen  $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \rightarrow - \otimes (- \otimes -)$ ,  $\lambda : \mathbb{1} \otimes - \rightarrow -$  und  $\rho : - \otimes \mathbb{1} \rightarrow -$ , sodass die Kohärenzdiagramme aus der Definition einer schwachen 2-Kategorie kommutieren.

*Bem.* Eine monoidale Kategorie ist das gleiche wie eine 2-Kategorie mit nur einem Objekt.

**Bspe.** Monoidale Kategorien sind: • **(Set,  $\times, \{\heartsuit\}$ )**  
• **(R-Mod-R,  $\otimes_R, R$ )** wobei  $R$  ein Ring mit Eins ist

**Def.** Eine **symm. monoidale Kategorie** ist eine monoidale Kat. zusammen mit einem nat. Isomorphismus  $\gamma : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ , sodass die geeigneten Kohärenzdiagramme kommutieren. Es reicht aus, zu zeigen, dass folgende Diagramme kommutierten:

$$\begin{array}{ccc} (Y \otimes X) \otimes Z & \xleftarrow{\gamma \otimes \text{id}_Z} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{\alpha} X \otimes (Y \otimes Z) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ Y \otimes (X \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id}_Y \otimes \gamma} Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\alpha} (Y \otimes Z) \otimes X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes X & \xrightarrow{\gamma} & X \otimes \mathbb{1} \\ & \searrow \lambda & \swarrow \rho \\ & X & \end{array}$$

**Def.** Ein **monoidaler Funktor** zwischen (symm.) monoidalen Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  ist ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zusammen mit natürlichen Isomorphismen  $F(- \otimes_{\mathcal{D}} -) \Rightarrow F(- \otimes_{\mathcal{C}} -)$  und  $F\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ , welche verträglich mit  $\alpha, \lambda, \rho$  (und eventuell  $\gamma$ ) sind.

**Bsp. Set**  $\rightarrow$  **R-Mod**,  $X \mapsto$  freier  $R$ -Modul mit Basis  $X$

**Def.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  monoidale Funktoren. Eine natürliche Transformation  $\eta : F \Rightarrow G$  heißt **monoidal**, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \longrightarrow & F(X \otimes Y) \\ \downarrow \eta_X \otimes \eta_Y & & \downarrow \eta_{X \otimes Y} \\ GX \otimes GY & \longrightarrow & G(X \otimes Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{1} & \\ & \swarrow & \searrow \\ F(\mathbb{1}) & \xrightarrow{\eta_{\mathbb{1}}} & G(\mathbb{1}) \end{array}$$

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine monoidale Kategorie. Ein **Rechts-C-Modul** ist eine Kategorie  $\mathcal{D}$  mit einem Funktor  $\otimes : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und ...

**Bsp.** Die Kat.  $\mathcal{D}$  besitze kleine Koprodukte. Dann wird  $\mathcal{D}$  zu einem **Set-Modul** durch  $\times = \otimes : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $(X, I) \mapsto \coprod_{i \in I} X$

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  monoidale Kategorie. Ein Funktor  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  zwischen  $\mathcal{C}$ -Rechts-Moduln  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{D}'$  heißt **C-Modulfunktor**, falls  $F(X) \otimes I$  und  $F(X \otimes I)$  natürlich isomorph sind.

**Def.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  monoidale Kat'en und  $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein monoidaler Funktor. Dann heißt  $(\mathcal{D}, i)$  eine **C-Algebra**. Morphismen von C-Algebren sind kommutative Quadrate von monoidalen Funktoren.

**Def.** Eine  $\mathcal{C}$ -Algebra  $\mathcal{D}$  heißt **zentral**, falls  $i(A) \otimes_{\mathcal{D}} B \cong B \otimes_{\mathcal{D}} i(A)$  natürlich für alle  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C}), B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ .

*Bem.* Ist die  $\mathcal{C}$ -Algebra  $\mathcal{D}$  symmetrisch, so auch zentral.

**Def.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  Kategorien. Eine **Adjunktion in 2 Variablen** oder **Biadjunktion** besteht aus Funktoren

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \text{Hom}_{\mathcal{R}} : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{L}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$$

und natürlichen Isomorphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \text{Hom}_{\mathcal{L}}(C, E)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(C \otimes D, E) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \text{Hom}_{\mathcal{R}}(D, E)).$$

**Notation.**  ${}^{\mathcal{C}}E := \text{Hom}_{\mathcal{L}}(C, E)$ ,  $E^{\mathcal{D}} := \text{Hom}_{\mathcal{R}}(D, E)$

*Bem.*  $k \otimes i \sqsupseteq p \iff k \sqsupseteq \text{Hom}_{\mathcal{R}}(i, p) \iff i \sqsupseteq \text{Hom}_{\mathcal{L}}(k, p)$

**Bsp.** Seien  $R, S, T$  drei Ringe,  $\mathcal{C} := R\text{-Mod-S}$ ,  $\mathcal{D} := S\text{-Mod-T}$ ,  $\mathcal{E} := R\text{-Mod-T}$ . Eine Biadjunktion ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{E}, & (M, N) &\mapsto M \otimes_S N, \\ \text{Hom}_{\mathcal{R}} : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{C}, & (N, P) &\mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Mod-T}}(N, P), \\ \text{Hom}_{\mathcal{L}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{D}, & (M, P) &\mapsto \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, P). \end{aligned}$$

**Def.** Eine monoidale Kategorie  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  heißt **monoidal abgeschlossen**, wenn  $\otimes$  Teil einer Biadjunktion ist.

**Bspe.** • **(R-Mod-R,  $\otimes_R, R$ )** • **(Set,  $\times, \{\heartsuit\}$ )**

**Def.** Sei  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Teil einer Biadjunktion,  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  und  $\mathcal{E}$  Modellkategorien. Dann heißt  $\otimes$  **Quillen-Biadjunktion**, falls für alle Kof'en  $(f : U \hookrightarrow V) \in \mathcal{C}$ ,  $(g : W \hookrightarrow X) \in \mathcal{D}$  der Morphismus

$$f \square g : P(f, g) := V \otimes W \cup_{U \otimes W} U \otimes X \rightarrow V \otimes X$$

eine Kofaserung in  $\mathcal{E}$  ist, welche azyklisch ist, wenn  $f$  oder  $g$  azyklisch ist.

**Lem.** Die Bedingung ist äquivalent zu: Für alle Kofaserungen  $(g : W \hookrightarrow X) \in \mathcal{D}$  und Faserungen  $(p : Y \rightarrow Z) \in \mathcal{E}$  ist

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}, \square} : \text{Hom}_{\mathcal{R}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(X, Z) \times_{\text{Hom}_{\mathcal{R}}(W, Z)} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(W, Y)$$

eine Faserung und azyklisch, wenn  $g$  oder  $p$  es ist. Analog für  $\text{Hom}_{\mathcal{L}}$ .

**Prop.** Sei  $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Quillenbifunktor. Ist  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  kofasernd, so ist  $C \otimes - : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Quillenfunktor mit Rechtsadj.  $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(C, -)$ .

*Bem.* Analog: Sei  $E$  fasernd. Dann ist  $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(-, E) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  ein Quillen-Links-Adjungierter zu  $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(-, E) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Lem.** Sei  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  eine Biadj.,  $I \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C}), J \subseteq \text{Mor}(\mathcal{D})$  Mengen. Dann gilt:  $\text{Cof}(I) \square \text{Cof}(J) \subseteq \text{Cof}(I \square J)$  mit  $\text{Cof}(K) := \square(K^{\square})$ .

**Satz.** Seien  $(\mathcal{C}, I, J), (\mathcal{D}, I', J')$  kombinatorische Modellkategorien. Dann ist  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  genau dann ein Quillenbifunktor, wenn  $I \square I'$  Kofaserungen in  $\mathcal{E}$  und  $I \square J', J \square I'$  jeweils azyklische Kofaserungen in  $\mathcal{E}$  sind.

**Def.** Eine **monoidale Modellkategorie** ist eine Modellkategorie  $\mathcal{M}$  mit monoidal abgeschlossener Struktur  $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{1})$ , sodass

- $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ein Quillenbifunktor und
- $Q\mathbb{1} \otimes X \rightarrow \mathbb{1} \otimes X \cong X$  und  $X \otimes Q\mathbb{1} \rightarrow X \otimes \mathbb{1} \cong X$  für alle kofasernden  $X$  jeweils schwache Äquivalenzen sind.

*Bem.* Die zweite Bedingung ist äquivalent zu:

$$X \cong \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathbb{1}, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(Q\mathbb{1}, X), \quad X \cong \text{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathbb{1}, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}}(Q\mathbb{1}, X)$$

sind schwache Äquivalenzen für alle fasernden  $X$ .

**Beob.** Sei  $\mathcal{M}$  eine mon. Modellkat,  $(A \xrightarrow{i} X), (E \xrightarrow{p} B) \in \mathcal{M}$ . Es gilt

$$i \sqsupseteq p \iff (\text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, E) \rightarrow P(i, p)) \text{ ist surjektiv.}$$

**Def.** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **kartesisch abgeschlossen**, falls  $(\mathcal{C}, \times, *)$  eine abgeschlossene monoidale Kategorie ist.

**Bsp.** Sei  $\mathcal{C}$  eine bivollständige, kartesisch abgeschlossene Kategorie. Sei  $\mathcal{C}_* := * / \mathcal{C}$ . Das initiale und terminale Objekt dieser Kategorie ist  $\text{id}_*$ , sie ist also punktiert. Für  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*)$  definiere  $X \wedge Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  durch folgenden Pushout:

$$\begin{array}{ccc} X \amalg Y & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \wedge Y \end{array}$$

Für  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  sei  $X_+ := X \amalg * \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*)$ .

Es besteht die Adj.  $(-)_+ : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}_* : U$ , wobei  $U$  der Vergissfunktion ist. Mit  $S^0 := *_+ = * \amalg *$  wird  $(\mathcal{C}_*, \wedge, S^0)$  zu einer symmetrischen monoidalen Kategorie und  $(-)_+$  zu einem monoidalen Funktor.

Für  $V, W \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*)$  definiere  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(V, W)$  als Pullback

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(V, W) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(V, W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(*, *) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(*, W) \end{array}$$

Dann ist  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(X, -)$  rechtsadjungiert zu  $- \wedge X$  für alle

$X \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*)$  und damit  $\mathcal{C}_*$  sogar monoidal abgeschlossen.

Trage  $\mathcal{C}$  zusätzlich eine Modellstruktur, sodass  $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Quillenfunktor und  $*$  kofasernd ist (also  $(\mathcal{C}, \times, *)$  eine monoidale Modellkategorie ist). Dann erzeugt  $U : \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}$  eine symmetrische monoidale Modellstruktur auf  $(\mathcal{C}_*, \wedge, S^0)$  und  $(-)_+ \dashv U$  ist eine Quillenadjunktion, sogar eine monoidale:

**Def.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  monoidale Modellkategorien.

Eine Quillen-Adjunktion  $F : \mathcal{C} \xrightarrow{\perp} \mathcal{D} : U$  heißt **monoidal**, falls

- $F$  monoidal ist und
- $FQ\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{Fq} F\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$  eine schwache Äquivalenz ist.

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine mon. Modellkat. Eine **C-Modellkategorie** ist eine Modellkat.  $\mathcal{D}$  mit Struktur  $\otimes : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  als  $\mathcal{C}$ -Rechtsmodul, sodass

- $\otimes : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist eine Quillen-Biadjunktion,
- $X \otimes Q\mathbb{1} \xrightarrow{\text{id}_X \otimes q} X \otimes \mathbb{1}$  ist eine schw. Äq. für alle kof.  $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ .

*Bem.* Wenn  $\mathcal{C}$  punktiert ist, so auch  $\mathcal{D}$ .

**Prop.** Sei  $(\mathcal{C}, \times, *)$  eine monoidale Modellkategorie und  $*$  kofasernd. Ist dann  $\mathcal{D}$  eine  $\mathcal{C}$ -Modellkategorie, so ist  $\mathcal{D}_*$  eine  $\mathcal{C}_*$ -Modellkategorie. Damit gibt es eine Äquivalenz

$$\{\text{punktierte } \mathcal{C}\text{-Modellkategorie}\} \longleftrightarrow \{\mathcal{C}_*\text{-Modellkategorien}\}.$$

**Prop.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  Modellkategorien und  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  eine Quillen-Biadjunktion. Dann ist  $\otimes^{\flat} : \text{Ho}(\mathcal{C}) \times \text{Ho}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{E})$  eine Biadjunktion mit Adjungierten  $\mathbb{R} \text{Hom}_r$  und  $\mathbb{R} \text{Hom}_l$ .

**Satz.** Ist  $\mathcal{C}$  eine (symm.) monoidale Modellkategorie, so ist  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  eine monoidal abgeschlossene Kategorie.

## Simpliziale Mengen

*Ref.* Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung enthält eine Einführung in simpliziale Mengen.

- Bspe.** •  $I := \Delta[1]$  heißt **Intervall**,  
 •  $\Delta^i[n] := \{x \in \Delta[n] \mid i \notin \text{im}(x)\} \subset \Delta[n]$  heißt  **$i$ -Seite**,  
 •  $S^n := \cup_{i=0}^n \Delta^i[n]$  heißt  **$n$ -Sphäre**.  
 •  $\Lambda^i[n] := \cup_{j \neq i} \Delta^j[n]$  heißt  **$i$ -Horn**.

**Def.** Ein Morphismus  $p : E \rightarrow X$  simplizialer Mengen heißt **Kan-Faserung**, falls  $\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid 0 \leq i \leq n\} \sqsupset p$

**Def.** Eine simpl. Menge heißt **Kan-Komplex**, falls  $X \rightarrow * := \Delta[0]$  eine Kan-Faserung ist.

- Def.** • Ein **inneres Horn** ist ein  $\Lambda^i[n] \subset \Delta[n]$  mit  $0 < i < n$ .  
 • Eine simpl. Menge  $X$  heißt **innerer Kan-Komplex**, falls

$$\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid 0 < i < n\} \sqsupset (X \rightarrow *).$$

*Bem.* Es ist  $X$  also genau dann ein (innerer) Kan-Komplex, wenn man (innere) Hörner in  $X$  füllen kann.

**Def.** Seien  $X \in \mathbf{sSet}$ ,  $x, y \in X_0$ , d. h.  $x, y : \Delta[0] \rightarrow X_0$ . Setze

$$x \sim y := \iff \exists \alpha : I \rightarrow X : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y.$$

mit  $\alpha(\epsilon) := \alpha \circ (\Lambda^\epsilon[1] \hookrightarrow I)$  für  $\epsilon = 0, 1$ . Setze  $\pi_0(X) := X/\sim$ .

**Prop.** Ist  $X$  ein Kan-Komplex, so ist  $\sim$  eine Äq'-relation.

**Def.** Eine **anodyne Erweiterung** ist ein Morphismus  $i : A \rightarrow B$  von simpl. Mengen, welcher die LHHE bzgl. aller Kan-Faserungen hat, d. h. die Unterkategorie der anodynen Erweiterungen ist die Saturierung von  $\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}$ , also  $\text{Cof}(\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n]\})$ .

**Satz.** Die Monomorphismen in  $\mathbf{sSet}$  sind genau die Retrakte von Zellkomplexen über  $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}$ .

**Def.** Eine **triviale Faserung** ist ein Mor. in  $\mathbf{sSet}$ , welcher die RHHE bzgl.  $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}$ , d. h. bzgl. allen Monomor. hat.

**Satz.** (anodyne Erweiterungen, Kan-Faserungen) und (Monomorphismen, triviale Faserungen) sind jeweils schwache Faktorisierungssysteme von  $\mathbf{sSet}$ .

**Satz (Gabriel-Zisman).** Sei  $k : Y \rightarrow Z$  ein Monomorphismus. Ist dann  $i : A \rightarrow B$  anodyn, so ist  $i \circ k : A \times Z \cup_{A \times Y} B \times Y \rightarrow B \times Z$  (mit  $\otimes := \times$ ) ebenfalls anodyn.

*Bem.* Damit wird folgen, dass  $\mathbf{sSet}$  eine kartesisch abgeschlossene Modellkategorie wird (d. h.  $\times$  ist ein Quillen-Bifunktor).

**Def.** Seien  $X, Y$  simpliziale Mengen. Dann ist der **Funktorenkomplex**  $Y^X \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$  definiert durch

$$(Y^X)_n := \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n] \times X, Y)$$

*Bem.* Es gilt  $\text{Hom}(Z, Y^X) \cong \text{Hom}(Z \times X, Y)$ .

**Kor.** Ist  $Y$  ein Kan-Komplex, so ist  $Y^X$  wieder ein Kan-Komplex.

**Def.** Zwei Morphismen  $f, g : X \rightarrow Y$  zwischen simpl. Mengen  $X, Y$  heißen **homotop**, falls  $f \sim g$  in  $Y^X$ , d. h. die Menge der Homotopieklassen von Morphismen ist  $\pi_0(Y^X)$ .

**Kor (Homotopieerweiterungseigenschaft, HEE).**  
 Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Kan-Faserung und  $i : Y \rightarrow Z$  ein Monomorphismus. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times I & \xrightarrow{h'} & E \\ \downarrow i \times \text{id}_I & \searrow \bar{h} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{h} & X \\ \uparrow & \nearrow & \\ Z \times \Lambda^\epsilon[1] & & \end{array}$$

existiert der gestrichelte Pfeil.

**Def.** Ein Monomorphismus  $i : A \rightarrow B$  in  $\mathbf{sSet}$  heißt **starker Deformationsretrakt** (SDR), falls ein  $r : B \rightarrow A$  mit  $ri = \text{id}_A$  und  $[ir] = [\text{id}_B] \in \pi_0(B^B \text{ in } A/\mathbf{sSet})$ , d. h. es existiert  $h : B \times I \rightarrow B$  mit  $h_0 = \text{id}_B$ ,  $h_1 = ir$ ,  $h|_{A \times I} = \text{id}_{A \times I}$  oder ein Zickzack solcher  $h$ 's.

**Bspe.**  $\Lambda^0[1], \Lambda^1[1] \subset \Delta[1]$  sind starke Deformationsretrakte.

**Prop.** Sei  $i : A \rightarrow B$  anodyn,  $A, B$  Kan-Komplexe. Dann ist  $A$  ein SDR von  $B$  vermöge  $i$ .

**Prop.** Sei  $i : A \rightarrow B$  ein Monomorphismus, sodass  $A$  ein SDR von  $B$  ist. Dann ist  $i$  anodyn.

**Prop.** Für eine Kan-Faserung  $p : E \rightarrow X$  sind äquivalent:

- $p$  ist trivial.
- Es existiert ein Schnitt  $s : X \rightarrow E$  und ein  $h : E \times \Delta[1] \rightarrow E$  mit  $ps = \text{id}_X$  und  $h : \text{id}_E \sim sp \pmod{X}$
- $p$  ist eine Homotopieäquivalenz, d. h. es existiert ein  $s : X \rightarrow E$  mit Homotopien  $k : ps \sim \text{id}_X$  und  $h : sp \sim \text{id}_E$ .

**Prop.** Sei  $p : E \rightarrow X$  eine Faserung,  $i : A \rightarrow X$  ein SDR. Dann ist  $p^{-1}(A) \rightarrow E$  im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(A) & \xrightarrow{r} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

ebenfalls ein SDR.

**Kor.** Sei  $p : E \rightarrow X \times \Delta[1]$  eine Faserung. Sei  $p_0 := p|_{p^{-1}(X \times \Lambda^0[1])}$ ,  $p_1 := p|_{p^{-1}(X \times \Lambda^1[1])} : E_i \rightarrow X$ . Dann sind  $p_0, p_1 : E_i \rightarrow X$  faserweise homotopieäquivalent, d. h. es existieren  $f, g$  in

$$\begin{array}{ccccc} E_0 & \xrightarrow{f} & E_1 & \xrightarrow{g} & E_0 \\ & \searrow p_0 & \downarrow p_1 & \nearrow p_0 & \\ & & X & & \end{array}$$

mit  $\text{id}_{E_0} \sim gf \pmod{X}$  und  $fg \sim \text{id}_{E_1} \pmod{X}$

**Kor.** Sei  $p : E \rightarrow Y$  eine Faserung und  $f, g : X \rightarrow Y$  homotop. Dann sind die Pullbacks  $f^*E$  und  $g^*E$  faserweise homotop (also mod  $Y$ ).

**Kor.** Sei  $X$  zshgd (d. h.  $\pi_0(X) = *$ ),  $p : E \rightarrow X$  eine Faserung. Dann sind je zwei Fasern von  $p$  homotopieäquivalent.

**Def.** • Seien  $x, y : \Delta[n] \rightarrow X$  zwei  $n$ -Simplizes in einer simplizialen Menge  $X$  mit  $x|_{\partial\Delta[n]} = a = x|_{\partial\Delta[n]}$ . Schreibe  $x \sim y \pmod{\partial\Delta[n]}$ , falls  $\exists h : \Delta[n] \times \Delta[1] \rightarrow X$  mit  $h|_{\Lambda^0[1]} = x$ ,  $h|_{\Lambda^1[1]} = y$ ,  $h|_{\partial\Delta[n]} = a$ .

• Ein Kan-Komplex  $X$  heißt **minimal**, falls

$$x \sim y \pmod{\partial\Delta[n]} \iff x = y.$$

**TODO: Definition vervollständigen**

**Lem.** Sei  $X$  ein Kan-Komplex. Dann existiert ein SDR  $X'$  von  $X$ , sodass  $X'$  minimal ist.

**Lem.** Sei  $X$  minimal und  $f : X \rightarrow X$  mit  $f \sim \text{id}_X$ . Dann ist  $f$  ein Isomorphismus.

**Kor.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz zwischen minimalen Komplexen. Dann ist  $f$  schon ein Isomorphismus.

**Def.** Eine Faserung  $p : E \rightarrow X$  heißt **minimal**, falls für alle Simplizes  $x, y : \text{Hom}(\Delta[n], E)$  mit  $p \circ x = p \circ y$  mit  $x \sim y \pmod{\partial\Delta[n]}$ .

**Def.** Ein **Bündel** mit Faser  $F$  ist eine Abb.  $p : E \rightarrow B$ , sodass für alle Simplizes  $\sigma : \Delta[n] \rightarrow B$  der Pullback  $\Delta[n] \times_B E$  homotopieäquivalent zu  $\Delta[n] \times F$  ist.

**Lem.** Eine minimale Faserung  $p : E \rightarrow X$  ist ein Bündel.

**Def.** Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathbf{sSet}$  heißt **schwache Äquivalenz**, falls für alle Kan-Komplexe  $K$  die ind. Abb.  $[f, K] : [Y, K] \rightarrow [X, K]$  (mit  $[Y, K] := \pi_0(K^Y)$ ) bij. ist.

**Bspe.** • Homotopieäquivalenzen ist eine schwache Äquivalenzen.

- Triviale Faserungen sind schwache Äquivalenzen.
- Sei  $i : A \rightarrow B$  eine anodyne Erweiterung. Für jeden Kan-Komplex  $K$  ist dann  $K^i : K^B \rightarrow K^A$  eine triviale Faserung, insbesondere also eine schwache Homotopieäquivalenz.
- Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz zwischen Kan-Komplexen  $X, Y$ , so ist  $f$  eine Homotopieäquivalenz.

*Bem.*  $f$  ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn in allen Diagrammen der Form

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \overline{X} \\ \downarrow f & & \downarrow \overline{f} \\ Y & \longrightarrow & \overline{Y} \end{array}$$

mit  $\overline{X}, \overline{Y}$  Kankomplexe,  $X \rightarrow \overline{X}, Y \rightarrow \overline{Y}$  anodyn der Morphismus  $\overline{f}$  eine schwache Äquivalenz ist.

**Lem.** Sei  $i : A \rightarrow B$  anodyn,  $p : E \rightarrow A$  ein Bündel. Dann existiert ein Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \longleftarrow & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ A & \longleftarrow & B \end{array}$$

mit einem Bündel  $p'$ . Weiter ist  $p'$  eindeutig bis auf Isomorphie. Außerdem ist  $E \hookrightarrow E'$  anodyn.

**Prop.** • Eine Faserung  $p : E \rightarrow X$  ist genau dann trivial, wenn  $p$  eine schwache Äquivalenz ist.  
• Eine Kofaserung  $i : A \rightarrow B$  ist genau dann anodyn, wenn  $i$  eine schwache Äquivalenz ist.

**Lem.** Pullbacks längs Bündeln erhalten schwache Äquivalenzen.

**Satz** (Quillen). Die Kategorie der simplizialen Mengen mit den schwachen Äquivalenzen wird zu einer kartesisch abgeschlossenen, eigentlichen, kombinatorischen Modellkategorie, wenn als Kofaserungen die Monomorphismen und als Faserungen die Kan-Faserungen gewählt werden.

## Kettenkomplexe

Sei  $R$  ein Ring und  $\mathbf{Mod}\text{-}R$  die Kategorie der  $R$ -Moduln.

**Def.** Ein  $P \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$  heißt **projektiv**, falls  $\text{Hom}_R(P, f) : \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, N)$  für alle surjektiven  $f : M \rightarrow N$  surjektiv ist.

**Bem.** Eine Abb.  $f : M \rightarrow N$  ist genau dann surjektiv, wenn  $\text{Hom}(P, f)$  surjektiv für alle projektiven  $P$ .

**Bspe.** •  $R$  ist projektiv

- Direkte Summen projektiver Moduln sind projektiv.
- Retrakte projektiver Moduln sind wieder projektiv.

**Bem.** Damit hat  $\mathbf{Mod}\text{-}R$  genügend viele projektive, d. h. jedes Modul  $M$  erlaubt eine Surjektion  $P \rightarrow M$  mit  $P$  projektiv.

**Def.** Sei  $\text{Ch}_*(R)$  die Kategorie der Kettenkomplexe, die in nichtnegativen Graden konzentriert sind, d. h. Objekte sind Diagramme der Form

$$\dots \rightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \quad \text{mit } \partial_i \circ \partial_{i+1} = 0.$$

Elemente in  $Z_n C := \{x \in C_n \mid \partial_n(x) = 0\}$  heißen  **$n$ -Zykel** und Elemente in  $B_n C := \{\partial_n(y) \mid y \in C_{n+1}\} \subseteq Z_n C$  heißen  **$n$ -Ränder**. Die Gruppe  $H_n(C) := Z_n C / B_n C$  heißt  **$n$ -te Homologie**. Ist  $f : C \rightarrow C'$  ein Morphismus von Kettenkomplexen, so induziert dieser einen Morphismus  $H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(C')$ . Es heißt  $f$  ein Homologie-Isomorphismus (oder Quasi-Isomorphismus), falls  $H_n(f)$  für alle  $n \geq 0$  ein Isomorphismus ist.

**Satz.** Zusammen mit den Homologie-Isomorphismen als schwache Äquivalenzen wird  $\text{Ch}_*(R)$  zu einer komb. Modellkategorie, wenn wir als Kofaserungen gradweise Monomorphismen mit gradweise projektivem Kokern und als Faserungen Morphismen, die im positiven Grad gradweise Surjektionen sind, wählen.

**Def.** Diese Modellstr. heißt **proj. Modellstruktur** auf  $\text{Ch}_*(R)$ .

**Bem.** Alle Komplexe in die projektive Modellstruktur sind fasernd, insbesondere ist  $\text{Ch}_*(R)$  rechtseigentlich. Die kofasernden Objekte sind die Komplexe projektiver Moduln. Projektive Auflösung entspricht dem kofasernden Ersatz.

**Def.** Es sei  $D(n)$  der Komplex  $\dots \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}} R \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  mit  $R$  im Grad  $n$  und  $n-1$  und  $S(n)$  der Komplex  $\dots \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  mit  $R$  im Grad  $n$ .

**Def.** Der **Einhängungsfunktor** ist

$$\Sigma : \text{Ch}_*(R) \rightarrow \text{Ch}_*(R), \quad (\Sigma C)_{n+1} := C_n, \quad (\Sigma C)_0 := 0.$$

**Bem.** Es gilt  $D(n+1) = \Sigma(D(n))$  und  $S(n+1) = \Sigma(S(n))$ .

**Bem.** Es gilt  $\text{Hom}(D(n), C) \cong C_n$  und  $\text{Hom}(S(n), C) \cong Z_n C$ .

**Lem.** Ein Morphismus  $f : C \rightarrow C'$  ist genau dann eine Faserung (d. h. im positiven Grad surjektiv), wenn  $f$  die RHE bzgl. aller  $\{0 \rightarrow D(n) \mid n \geq 1\}$  hat.

**Bem.** Folglich ist  $\{0 \rightarrow D(n) \mid n \geq 1\}$  die Menge der erz. azykl. Kof. der projektiven Modellstruktur.

**Lem.** Sei  $f : C \rightarrow C'$  ein Mor. in  $\text{Ch}_*(R)$ . Dann sind äquivalent:

- $f$  ist ein Homologie-Isomorphismus und in positiven Graden surjektiv
- Für alle  $n \geq 0$  ist  $C_n \rightarrow Z_{n-1} C' \times_{Z_{n-1} C} C'_n, x \mapsto (\partial x, f(x))$  surjektiv.
- $f$  hat die RHE bzgl.  $\{S(n) \rightarrow D(n) \mid n \geq 0\}$

**Bem.** Folglich ist  $\{S(n) \rightarrow D(n) \mid n \geq 0\}$  die Menge der erzeugenden Kofaserungen der projektiven Modellstruktur.



## Die Homotopiekategorie als $\text{Ho}(\mathbf{sSet})$ -Modul

**Def.** Die **Kategorie der Räume** ist  $\mathcal{S} := \text{Ho}(\mathbf{sSet})$ .

**Ziel.** Zeige, dass  $\text{Ho}(\mathcal{M})$  für jede Modellkategorie  $\mathcal{M}$  in natürlicher Weise ein Modul über  $\mathcal{S}$  ist, d. h. wir wollen Funktoren

$$\begin{aligned} \text{Ho}(\mathcal{M}) \times \mathcal{S} &\rightarrow \text{Ho}(\mathcal{M}), & (X, K) &\mapsto X \otimes^{\mathbb{L}} K, \\ \text{Ho}(\mathcal{M})^{\text{op}} \times \text{Ho}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{S}, & (X, Y) &\mapsto \text{Map}(X, Y) =: Y^X, \\ \mathcal{S}^{\text{op}} \times \text{Ho}(\mathcal{M}) &\rightarrow \text{Ho}(\mathcal{M}), & (K, X) &\mapsto \mathbb{R}\text{Hom}(K, X) =: X^K, \end{aligned}$$

sodass gilt:

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{M})}(X \otimes^{\mathbb{L}} K, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, Y^X) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y^K).$$

Weiter gilt:  $X \otimes^{\mathbb{L}} \Delta[0] \cong X$ , d. h.  $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{M})}(X \times \Delta[0], Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{S}}(\Delta[0], Y^X) = \pi_0(Y^X)$ .

**Def.** Sei  $\mathcal{B}$  eine kleine Kategorie und  $\lambda$  eine Ordinalzahl. Ein Funktor  $f: \mathcal{B} \rightarrow \lambda$  heißt **lineare Einbettung**, falls:

$$\forall u: b \rightarrow c: F(u) = \text{id} \implies u = \text{id}.$$

In diesem Fall heißt  $F(i)$  für  $i \in \text{Ob}(\mathcal{B})$  der **Grad von  $i$** .

Eine Kategorie mit einer linearen Erweiterung heißt **gerichtet**.

Ist  $\mathcal{B}^{\text{op}}$  gerichtet, so heißt  $\mathcal{B}$  inverse Kategorie.

**Def.** • Sei  $\mathcal{C}$  kovollständig,  $\mathcal{B}$  gerichtet,  $i \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ .

Das  $i$ -te **Latching-Objekt**  $L_i X$  eines Funktors  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\mathcal{B}})$  ist  $L_i X := \text{colim}_{j \xrightarrow{+} i} X_j$ . Die Indexkategorie ist dabei die Scheibenkategorie der Objekte vom Grad  $< i$  über  $X_i$ .

• Sei  $\mathcal{B}$  invers und  $\mathcal{C}$  vollständig. Das  $i$ -te **Matching-Objekt** von  $X$  ist  $M_i X := \lim_{i \xrightarrow{-} j} X_j$ .

**Bem.** Es gibt nat. Transformationen  $L_i X \rightarrow X_i$  und  $X_i \rightarrow M_i X$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie,  $\mathcal{B}$  gerichtet. Dann gibt es folgende Modellstruktur auf  $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$ : Ein Funktor  $\tau: X \rightarrow Y$  ist eine

- schw. Äq.  $\iff \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{B}): \tau_i: X_i \rightarrow Y_i$  ist schw. Äq,
- Faserung  $\iff \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{B}): \tau_i: X_i \rightarrow Y_i$  ist Faserung,
- Kof.  $\iff \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{B}): X_i \cup_{L_i X} L_i Y \rightarrow Y_i$  ist eine Kof,
- triv. Kof.  $\iff \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{B}): X_i \cup_{L_i X} L_i Y \rightarrow Y_i$  ist eine triv. Kof.

Bzgl. dieser Modellstr. ist  $\text{colim}: \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Linksquillenfunktor.

**Bem.** • Dual:  $\mathcal{M}^{\mathcal{B}^{\text{op}}} \simeq (\mathcal{M}^{\text{op}})^{\mathcal{B}}$

• Ist  $\tau$  eine Kofaserung in  $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$  und  $\mathcal{B}$  gerichtet, so ist insbesondere  $\forall i: \tau_i: X_i \rightarrow Y_i$  eine Kofaserung.

**Beweis.** Da  $\text{colim}$  ein Linksquillenfunktor ist, ist  $L_i X \rightarrow L_i Y$  eine Kofaserung. Damit ist auch  $X_i \rightarrow X_i \cup_{L_i X} L_i Y$  als Pushout von  $L_i X \rightarrow L_i Y$  eine Kofaserung. Somit ist auch die Komposition mit der Kofaserung  $X_i \cup_{L_i X} L_i Y \rightarrow Y_i$  wieder eine Kofaserung.

**Def.** Eine **Reedy-Kategorie** ist eine Kategorie  $\mathcal{B}$  zusammen mit Unterkategorien  $\mathcal{B}_+$  und  $\mathcal{B}_-$  und einem Funktor  $d: \mathcal{B} \rightarrow \lambda$ , der Gradfunktion, wobei  $\lambda$  eine Ordinalzahl ist, sodass folgendes gilt:

- $\mathcal{B}_+$  ist bzgl.  $d$  gerichtet,      •  $\mathcal{B}_-$  ist bzgl.  $d$  invers,

- Jeder Morphismus  $f \in \text{Mor}(\mathcal{B})$  lässt sich eindeutig faktorisieren als  $f = ip$  mit  $i \in \mathcal{B}_+$  und  $p \in \mathcal{B}_-$ .

**Bsp.**  $\Delta$  ist Reedy mit  $\Delta_+ := \{ \text{injektive} \}$  und  $\Delta_- := \{ \text{surjektive} \}$ .

**Bspe.** • Sei  $A^\bullet$  ein kosimpliziales Objekt in  $\mathcal{C}$ , d. h.  $A^\bullet \in \text{Ob}(\mathcal{C}^\Delta)$ . Wir schreiben  $A^\bullet[n] := A^\bullet_{[n]}$ . Dann

$$L_0 A^\bullet = \emptyset, \quad L_1 A^\bullet = A^\bullet[0] \amalg A^\bullet[0], \quad M_0 A^\bullet = *, \quad M_1 A^\bullet = A^\bullet[0].$$

• Sei  $X_\bullet$  ein simpl. Objekt in  $\mathcal{C}$ , d. h.  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\Delta^{\text{op}}})$ . Dann

$$L_0 X_\bullet = \emptyset, \quad L_1 X_\bullet = X_0, \quad M_0 X_\bullet = *, \quad M_1 X_\bullet = X_0 \times X_0.$$

**Bem.** Sei  $\mathcal{B}$  eine Reedy-Kategorie. Dann können wir Funktoren  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\mathcal{B}})$  wie folgt rekursiv konstruieren: Sei dazu  $d: \mathcal{B} \rightarrow \lambda$  die Gradfunktion und  $X|_{\mathcal{B}_{<\beta}}$  schon definiert. Sei dann  $i \in \mathcal{B}$  mit  $d(i) = \beta$ . Wähle eine Faktorisierung  $L_i X \rightarrow X_i \rightarrow M_i X$ . Sei  $i \rightarrow j$  mit  $d(i), d(j) \leq \beta$ . Gesucht ist ein Morphismus  $X_i \rightarrow X_j$ . Ohne Einschränkung sei  $(i \rightarrow j) \neq \text{id}$ . Faktorisiere

$(i \rightarrow j) = (k \xrightarrow{+} j) \circ (i \xrightarrow{-} k)$ . Gesucht ist also  $X_i \rightarrow X_k$  und  $X_k \rightarrow X_j$  für  $i \xrightarrow{-} k, k \xrightarrow{+} j$ . Dazu betrachte

$$X_i \xrightarrow{\text{gewählt}} M_i X \xrightarrow{\text{kanonisch}} X_k, \quad X_k \xrightarrow{\text{kanonisch}} L_j X \xrightarrow{\text{gewählt}} X_j.$$

**Def.** Sei  $\mathcal{B} = \Delta$  und  $A \in \mathcal{C}$ . Dann sind  $\ell^\bullet A, r^\bullet A \in \text{Ob}(\mathcal{C}^\Delta)$  def. durch

$$\ell^\bullet A[i] = A \times [i] := A \amalg \dots \amalg A, \quad r^\bullet A[i] := A.$$

**Bem.**  $\ell^\bullet \dashv (\text{Ev}^\bullet: X^\bullet \rightarrow X^\bullet[0]) \dashv r^\bullet$

**Satz.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie und  $\mathcal{B}$  eine Reedy-Kategorie. Dann existiert folgende Modellstruktur auf  $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$ : Eine natürliche Transformation  $f: X \rightarrow Y$  ist eine

- schw. Äq.  $\iff \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{B}): f_i: X_i \rightarrow Y_i$  ist schw. Äq.
- (triv.) Kof.  $\iff \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{B}): X_i \cup_{L_i X} L_i Y \rightarrow Y_i$  ist (triv.) Kof.
- (triv.) Fas.  $\iff \forall i \in \text{Ob}(\mathcal{B}): X_i \rightarrow Y_i \times_{M_i Y} M_i X$  ist (triv.) Fas.

**Bsp.**  $\mathcal{M}^\Delta, \mathcal{M}^{\Delta^{\text{op}}}$  sind wieder Modellkategorien.

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Modellkategorie,  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

- Ein **kosimplizialer Rahmen von  $A$**  ist eine Faktorisierung von  $\ell^\bullet A \rightarrow r^\bullet A$  der Form  $\ell^\bullet A \hookrightarrow A^* \xrightarrow{\sim} r^\bullet A$ , sodass  $A^*[0] = A$ .
- Dual ist ein simpl. Rahmen eine Faktorisierung  $l_\bullet A \xrightarrow{\sim} A_* \rightarrow r_\bullet A$ .

**Bem.** Ist  $A^*$  ein kosimplizialer Rahmen von  $A$ , so ist  $A^*[1]$  ein gutes Zylinderobjekt.

**Bsp.** Sei  $\mathcal{C}$  eine simpliziale Modellkategorie. Ist dann  $A$  kofasernd, so ist  $A \otimes \Delta^{\text{op}}$  mit  $(A \otimes \Delta^\bullet)[n] = A \otimes (\Delta^\bullet[n])$  ein kosimplizialer Rahmen von  $A$ . Insbesondere ist  $A \otimes \Delta^\bullet[1]$  ein gutes Zylinderobjekt.

## Die Wirkung von $\mathcal{S} = \text{Ho}(\mathbf{sSet})$

**Konstr.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie,  $K$  eine simpl. Menge,  $X$  ein Objekt aus  $\mathcal{M}$ . Wir wollen  $X \otimes^{\mathbb{L}} K \in \text{Ob}(\text{Ho}(\mathcal{M}))$  definieren:

- Wähle kofasernden Ersatz  $QX \xrightarrow{\sim} X$
- Wähle kosimplizialen Rahmen  $\ell^\bullet QX \hookrightarrow X^* \xrightarrow{\sim} r^\bullet QX$
- Setze  $X \otimes^{\mathbb{L}} K := \int_n X^*[n] \times K_n$ .
- Fasse  $X \otimes^{\mathbb{L}} K$  als Objekt in  $\text{Ho}(\mathcal{M})$  auf.

Sei  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ . Wir wollen  $Y^K \in \text{Ob}(\text{Ho}(\mathcal{M}))$  wie folgt definieren:

- Wähle fasernden Ersatz  $Y \xrightarrow{\sim} RY$ .
- Wähle simplizialen Rahmen  $\ell_\bullet RY \rightarrow Y_* \rightarrow r_\bullet RY$ .
- Setze  $Y^K := \mathbb{R}\text{Hom}(K, Y) = \int_n Y_*[n]^{K_n}$ .
- Fasse  $Y^K$  als Objekt in  $\text{Ho}(\mathcal{M})$  auf.

Wir definieren  $Y^X \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  wie folgt:

- Wähle  $QX \rightarrow X$  und  $Y \rightarrow RY$  wie eben.
- Wähle  $X^*, Y_*$  wie eben.
- Setze  $Y^X := \text{Map}(X, Y) = \text{diag}\text{Hom}(X^*, Y_*) = \text{Hom}(X^*, Y) = \text{Hom}(X, Y_*)$ .
- Fasse  $Y^X$  als Objekt von  $\text{Ho}(\mathbf{sSet}) = \mathcal{S}$  auf.

**Satz.** Diese Konstruktion macht  $\text{Ho}(\mathcal{M})$  zu einem wohldefinierten, abgeschl.  $\mathcal{S}$ -Modul. Sie ist mit Quillenadjunktionen verträglich.

**Satz.** Analog wird die Homotopiekategorie einer jeden punktierten Modellkategorie  $\mathcal{M}$  in kanonischer Weise zu einem  $\mathcal{S}_*$ -Modul, wobei  $\mathcal{S}_* := \text{Ho}(\mathbf{sSet}_*)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{Ho}(\mathcal{M}) \times \mathcal{S}_* &\rightarrow \text{Ho}(\mathcal{M}), & (X, K) &\mapsto X \wedge^{\mathbb{L}} K, \\ \text{Ho}(\mathcal{M})^{\text{op}} \times \text{Ho}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{S}_*, & (X, Y) &\mapsto \text{Map}_*(X, Y), \\ \mathcal{S}_*^{\text{op}} \times \text{Ho}(\mathcal{M}) &\rightarrow \text{Ho}(\mathcal{M}), & (K, Y) &\mapsto \mathbb{R}\text{Hom}_*(K, Y). \end{aligned}$$

Es gilt dann  $A \wedge^{\mathbb{L}} K_+ = A \otimes^{\mathbb{L}} K$ .

## Punktierte Modellkategorien

**Def.** Sei  $\mathcal{C}_*$  eine punktierte Kategorie und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus in  $\mathcal{C}_*$ . Sei  $0 : X \rightarrow * \rightarrow Y$  der eindeutig bestimmte Morphismus.

- Die **Kofaser**  $\text{cofib } f$  von  $f$  ist der Differenzkern von  $f, 0 : X \rightarrow Y$ .
- Die **Faser**  $\text{fib } f$  von  $f$  ist der Differenzkern von  $f, 0$ .

*Bem.* Folgende Diagramme sind Pushout- bzw. Pullbackdiagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \text{cofib } f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{fib } f & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

**Def.**  $\mathbb{S}^0 := \Delta[0]_+ \in \text{Ob}(\mathbf{sSet}_*) = \text{Ob}(\mathcal{S}_*)$ ,  $\mathbb{S}^1 := \Delta[1]_+ / \partial\Delta[1]_+$

**Def.** Sei  $\mathcal{C}_*$  eine punktierte Modellkategorie. Dann heißt

$$\begin{aligned} \Sigma : \text{Ho}(\mathcal{C}_*) &\rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_*), \quad X \mapsto X \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 && \text{Einhängung und} \\ \Omega : \text{Ho}(\mathcal{C}_*) &\rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_*), \quad Y \mapsto \mathbb{R} \text{Hom}_*(\mathbb{S}^1, Y) && \text{Verschleifung.} \end{aligned}$$

*Bem.*  $\Sigma \dashv \Omega$

*Konstr.* Sei  $X \in \text{Ob}(\text{Ho}(\mathcal{C}_*))$ . Wähle einen kofasernden Repräsentanten  $QX \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*)$  von  $X$ . Wähle dann einen komsimplizialen Rahmen  $(QX)^\circ$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (QX)^\circ \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 &= ((QX)^\circ \wedge \Delta[1]_+) / ((QX)^\circ \wedge \partial\Delta[1]_+) \\ &= ((QX)^\circ \otimes \Delta[1]) / ((QX)^\circ \otimes \partial\Delta[1]) = (QX \times I) / (QX \vee QX) \\ &= \text{cofib}(QX \vee QX \rightarrow QX \times I) \end{aligned}$$

für ein gutes Zylinderobjekt  $QX \times I$  zu  $QX$ . Ist  $X$  kofasernd, so gilt  $X \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 = \text{cofib}(X \vee X \rightarrow X \times I)$ . Dual gilt für ein kofaserndes  $Y : \Omega Y = \text{fib}(Y^I \rightarrow Y)$  für ein gutes Wegeobjekt  $Y^I$ .

**Def.**  $\mathbb{S}^l := \Sigma^l \mathbb{S}^0$  heißt  **$l$ -Sphere**.

**Notation.**  $[X, Y] := \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y)$  für  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{M})$

*Bem.*  $\pi_0 \text{Map}_*(X, Y) \cong [\mathbb{S}^0, \text{Map}_*(X, Y)]$ ,  
 $\pi_l \text{Map}_*(X, Y) = [\mathbb{S}^l, X, Y]$

*Bem.*  $\mathbb{S}^1$  ist eine folgendermaßen ein Kogruppenobjekt in  $\mathcal{S}_*$ :  
Für  $X \in \text{Ob}(\mathbf{sSet})$  sei  $\tilde{X}$  definiert als Pushout

$$\begin{array}{ccc} \text{sk}_0 X & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Delta[0] & \longrightarrow & \tilde{X} \end{array}$$

Zum Beispiel ist  $\widehat{\Delta[1]} = \mathbb{S}^1$ . Die Inklusionen  $i : \Delta^1[2] \rightarrow \Delta[2]$  und  $s : \Delta^1[2] \rightarrow \Delta[2]$  induzieren Abbildungen  $\tilde{i} : \mathbb{S}^1 = \Delta^1[2] \rightarrow \Delta[2]$  und  $\tilde{s} : \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 = \Delta^1[2] \rightarrow \Delta[2]$ . Da  $s$  eine anodyne Erweiterung ist, ist auch  $\tilde{s}$  als Pushout von  $s$  anodyn, also eine schwache Äquivalenz. Dann ist die Kogruppenkomultiplikation der Morphismus

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\tilde{i}} \widehat{\Delta[2]} \xrightarrow{\tilde{s}^{-1}} \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \quad \text{in } \mathcal{S}_*.$$

**Satz.** Sei  $X \in \text{Ho}(\mathcal{C}_*)$ . Dann ist

- $\Sigma^l X$  kanonisch eine Kogruppe für  $l \geq 1$  und abelsch für  $l \geq 2$ ,
- $\Omega^l Y$  kanonisch eine Gruppe für  $l \geq 1$  und abelsch für  $l \geq 2$ .

**Kor.**  $\pi_l X := \pi_0 \mathbb{R} \text{Hom}_*(\mathbb{S}^l, X) = [\mathbb{S}^l, X]$  ist eine Gruppe für  $l \geq 1$  und abelsch für  $l \geq 2$ .

*Bem.* Die Index-Kategorie  $I := \{\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet\}$  von Pushoutdiagrammen ist gerichtet, d. h.  $\mathcal{C}_*^I$  trägt eine Modellstruktur. Bzgl. dieser ist  $\text{colim} : \mathcal{C}_*^I \rightarrow \mathcal{C}_*$  ein Linksquillenfunktor. Wir erhalten einen Funktor  $\text{colim}^{\mathbb{L}} : \text{Ho}(\mathcal{C}_*^I) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_*)$ .

**Def.** Die **Homotopiekofaser** eines Morphismus  $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}_*$  ist

$$\text{cofib}^{\mathbb{L}}(f) := \text{colim}^{\mathbb{L}}(* \leftarrow A \xrightarrow{f} B).$$

*Konstr.* Wir haben das Diagramm  $(* \leftarrow A \xrightarrow{f} B) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*^I)$ . Durch Faktorisierung finden wir  $(Q* \leftarrow QA \hookrightarrow QB) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*^I)$ , wobei  $Q*$ ,  $QA$  und  $QB$  kofasernde Ersatzobjekte für  $*$ ,  $A$ , bzw.  $B$  und die Morphismen Kofaserungen sind. Dieses Diagramm ist dann ein kof. Ersatz für das originale Diagramm in  $\mathcal{C}_*^I$  und somit gilt

$$\text{cofib}^{\mathbb{L}}(f) = QB \cup_{QA} Q*.$$

**Def.** Dual ist die **Homotopiefaser** eines Mor.  $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}_*$

$$\text{fib}^{\mathbb{R}}(f) := \lim^{\mathbb{R}}(* \rightarrow B \xleftarrow{f} A).$$

**Bspe.** •  $\Omega Y = \text{fib}^{\mathbb{R}}(X \xrightarrow{\Delta} X \times X)$

•  $X \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 = \text{cofib}(QX \vee QX \rightarrow QX \times_{\text{gut}} I) = \text{cofib}^{\mathbb{L}}(X \vee X \xrightarrow{\nabla} X)$

**Def.** Die Folge  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C = \text{cofib}^{\mathbb{L}}(f)$  heißt **Kofasersequenz** und  $X = \text{fib}^{\mathbb{R}}(h) \rightarrow Y \xrightarrow{h} Z$  heißt **Fasersequenz**.

*Bem.*  $\Sigma A$  kooperiert folgendermaßen auf  $C = \text{cofib}^{\mathbb{L}}(f)$ : Die Kooperationsabbildung  $C \rightarrow C \vee \Sigma A$  entspricht nach dem Yoneda-Lemma einer Operation  $[\Sigma A, X] \times [C, X] \rightarrow [C, X]$ , welche natürlich in  $X \in \text{Ob}(\text{Ho}(\mathcal{C}_*))$  ist. Sei zunächst  $RX$  ein faserner Ersatz von  $X$ . Sei  $j \in [\Sigma A, X]$  und  $k \in [C, X]$ . Dann ist die Wirkung der Morphismus  $C \xrightarrow{\beta} RX \times RX \xrightarrow{\text{pr}_1} RX$  in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} QA & \xrightarrow{\sim} & A & \xrightarrow{j^*} & \Omega X & \longrightarrow & RX^I & \xrightarrow{\sim} & RX & \xrightarrow{\text{pr}_1} & RX \\ \downarrow Qf & & \downarrow \exists \alpha & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ QB & \xrightarrow{\sim} & & \xrightarrow{\exists \beta} & & \xrightarrow{\sim} & RX \times RX & \xrightarrow{\text{pr}_1} & RX & \xrightarrow{\sim} & RX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{pr}_0 & & \downarrow & & \downarrow \\ C = \text{cofib}^{\mathbb{L}}(f) & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{\sim} & RX & \xleftarrow{\sim} & & & & & \end{array}$$

Beachte:

- Dabei ist  $RX^I$  ist ein sehr gutes Pfadobjekt.
- Die ganz rechte Faserung ist azyklisch nach der 2-aus-3-Eigenschaft.
- $\text{pr}_0$  und  $\text{pr}_1$  sind Faserungen sind als Pullback von  $RX \rightarrow *$ .
- Der Morphismus  $QB \hookrightarrow C$  ist als Pushout einer Kofaserung selbst eine Kofaserung (siehe Konstruktion der Homotopiekofaser).

**TODO:** Wie genau sind jetzt  $\alpha$  und  $\beta$  definiert? Und mit welcher Eigenschaft ist dann  $\beta$  eindeutig und warum? Wer dies hier liest, und mir diese Fragen beantworten kann, bekommt ein Ü-Ei geschenkt!

**Dual.** Sei  $X = \text{fib}^{\mathbb{R}}(h) \rightarrow Y \xrightarrow{h} Z$  eine Fasersequenz. Dann operiert die Gruppe  $\Omega Z$  auf  $X$ . In einem Setting von topologischen Räumen ist die Wirkung folgendermaßen gegeben: Ein Element von  $\Omega Z$  wird repräsentiert durch einen geschlossenen Weg  $\gamma : I \rightarrow Z$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ . Sei  $x$  ein Element der Homotopie-Faser von  $h$ . Dann ist  $[\gamma].x = \tilde{\gamma}(1)$ , wobei  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$  ein Lift von  $\gamma$  ist.

**Satz.** Das sind in der Tat (Ko-) Operationen.

**Def.** Sei  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  eine Kofasersequenz. Dann heißt

$$\partial : C \xrightarrow{\text{Koop}} C \vee \Sigma A \xrightarrow{(C \rightarrow *) \vee \text{id}} * \vee \Sigma A = \Sigma A$$

der **Korandoperator** in der Kofasersequenz  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\partial} \Sigma A$ .

**Dual.** Sei  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  eine Fasersequenz. Dann heißt

$$\partial : \Omega Z = \Omega Z \times * \xrightarrow{\Omega Z \times (* \rightarrow X)} \Omega Z \times X \xrightarrow{\text{Op}} X$$

der **Randoperator** in der Fasersequenz  $\Omega Z \xrightarrow{\partial} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ .

**Bsp.**  $* \rightarrow X \xrightarrow{\text{id}} X \xrightarrow{\partial} * = \Sigma *$  ist eine Kofasersequenz und als  $* = \Omega * \xrightarrow{\partial} X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow *$  gleichzeitig eine Fasersequenz.

**Prop.** Sei  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  eine Kofasersequenz (in  $\text{Ho}(\mathcal{C}_*)$ ).

Dann ist  $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$  wieder eine Kofasersequenz, wobei die Kooperation von  $\Sigma Y$  auf  $\Sigma X$  wie folgt ist:

$$\Sigma X \xrightarrow{\text{Kmult.}} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{\text{id} \vee \Sigma f} \Sigma X \vee \Sigma Y \xrightarrow{\text{id} \vee \text{Inv.}} \Sigma X \vee \Sigma Y.$$

**Dual.** Ist  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  eine Fasersequenz, so ist  $\Omega Z \xrightarrow{\partial} X \xrightarrow{f} Y$  mit geeigneter Operation von  $\Omega Y$  auf  $\Omega Z$  eine Fasersequenz.

**Kor.** Ausgehend von  $X \xrightarrow{f} Y$  gibt eine lange Sequenz

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = \text{cofib}^{\mathbb{L}}(f) \xrightarrow{\partial} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma g} \Sigma Z \xrightarrow{-\Sigma \partial} \rightarrow \dots$$

in der jedes Objekt die Homotopiekofaser der vorh. Mor. ist.

**Dual.**  $\dots \rightarrow \Omega X \rightarrow \Omega Y \rightarrow \Omega Z \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$

**Satz.** • Ist  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  eine Kofasersequenz, so ist

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow [\Sigma Z, W] \rightarrow [\Sigma Y, W] \rightarrow [\Sigma X, W] \rightarrow \\ &\rightarrow [Z, W] \rightarrow [Y, W] \rightarrow [X, W] \end{aligned}$$

für alle  $W \in \text{Ob}(\text{Ho}(\mathcal{C}_*))$  eine exakte Sequenz von Gruppen bzw. punktierten Mengen.

• Ist  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  eine Fasersequenz, so ist

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow [W, \Omega X] \rightarrow [W, \Omega Y] \rightarrow [W, \Omega Z] \rightarrow \\ &\rightarrow [W, X] \rightarrow [W, Y] \rightarrow [W, Z] \end{aligned}$$

für alle  $W$  eine exakte Sequenz.

**Bem.** Für  $W = \mathbb{S}^0$  erhält man eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \pi_2(Z) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(Z) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(Z) \end{aligned}$$

**Lem.** Es sei der durchgezogene Teil des folgenden Diagramms gegeben. Dann existiert der gestrichelte Teil.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \dashrightarrow & \text{cofib}^{\mathbb{L}}(f) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow s \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \dashrightarrow & \text{cofib}^{\mathbb{L}}(f) \end{array}$$

Außerdem ist  $s$  verträglich mit den Kooperationen.

**Lem.** Sei der durchgezogene Teil des folgenden Diagramms gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & Z & \xrightarrow{\quad} & W \\ & \searrow v & & \searrow u & \\ & & Y & & \\ & & & \searrow d & \\ & & & & U \\ & & & \nearrow r & \\ & & & & V \\ & & & \nearrow s & \end{array}$$

Dabei sind  $X \rightarrow Y \rightarrow U$ ,  $Y \rightarrow Z \rightarrow W$  und  $X \rightarrow Z \rightarrow V$  Kofasersequenzen. Dann existieren  $r$ ,  $s$  wie eingezeichnet und  $r$  ist  $\Sigma U$ -äquivariant,  $s$  ist  $\Sigma v$ -äquivariant. Des Weiteren ist  $U \rightarrow V \rightarrow W$  eine Kofasersequenz mit Kowirkung

$$W \xrightarrow{\text{Koop}} W \vee \Sigma Y \xrightarrow{\text{id} \vee \Sigma d} W \vee \Sigma U.$$

**Kor.**  $\Sigma \text{cofib}^{\mathbb{L}}(uv) = \text{cofib}^{\mathbb{L}}(\text{cofib}^{\mathbb{L}} u \rightarrow \Sigma \text{cofib}^{\mathbb{L}} v)$

**Lem.** Sei  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  eine Kofasersequenz in  $\text{Ho}(\mathcal{C}_*)$ ,  $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$  eine Fasersequenz. Dann gilt

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\partial} & \Sigma X \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \exists & & \downarrow -\alpha^* \\ \Omega Z' & \xrightarrow{\partial} & X' & \xrightarrow{i} & Y' & \xrightarrow{p} & Z' \end{array}$$

**Lem.** Ist  $F : \mathcal{C}_* \rightleftarrows \mathcal{D}_* : U$  eine Quillenadjunktion, so erhält  $\mathbb{L}F$  Kofasersequenzen und  $\mathbb{R}U$  Fasersequenzen.

**Satz.** Der Funktor  $-\wedge^{\mathbb{L}}- : \text{Ho}(\mathcal{C}_*) \times \mathcal{S}_* \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_*)$  ist mit Kofasersequenzen verträglich, d. h.

• Ist  $A \in \text{Ob}(\text{Ho}(\mathcal{C}_*))$ ,  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  eine Kofaserseq. in  $\mathcal{S}_*$ , so ist  $A \wedge^{\mathbb{L}} X \rightarrow A \wedge^{\mathbb{L}} Y \rightarrow A \wedge^{\mathbb{L}} Z$  eine Kofaserseq. mit Kowirkung

$$\begin{aligned} A \wedge^{\mathbb{L}} Z \rightarrow A \wedge^{\mathbb{L}} (Z \vee \Sigma X) &\cong (A \wedge^{\mathbb{L}} Z) \vee (A \wedge^{\mathbb{L}} \Sigma X) \\ &\cong (A \wedge^{\mathbb{L}} Z) \vee \Sigma(A \wedge^{\mathbb{L}} X). \end{aligned}$$

• Ist  $K \in \mathcal{S}_*$ ,  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  eine Kofasersequenz in  $\text{Ho}(\mathcal{C}_*)$ , so ist  $X \wedge^{\mathbb{L}} K \rightarrow Y \wedge^{\mathbb{L}} K \rightarrow Z \wedge^{\mathbb{L}} K$  eine Kofasersequenz mit Kowirkung

$$\begin{aligned} Z \wedge^{\mathbb{L}} K \rightarrow (Z \vee \Sigma X) \wedge^{\mathbb{L}} K &\cong (Z \wedge^{\mathbb{L}} K) \vee (\Sigma X \wedge^{\mathbb{L}} K) \\ &\cong (Z \wedge^{\mathbb{L}} K) \vee \Sigma(X \wedge^{\mathbb{L}} K). \end{aligned}$$

**Achtung.** Man beachte das Vorzeichen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^m & \xrightarrow{\text{kan}} & \mathbb{S}^{m+n} \\ \sim \downarrow \gamma & & \downarrow (-1)^{mn} \text{id} \\ \mathbb{S}^m \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\text{kan}} & \mathbb{S}^{n+m} \end{array}$$

## Stabile Modellkategorien

**Def.** Eine punktierte Modellkategorie  $\mathcal{C}_*$  heißt stabil, falls  $\Sigma : \text{Ho}(\mathcal{C}_*) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_*)$  eine Kategorienäquivalenz ist.

**Bem.** Es folgt, dass dann  $\Omega = \Sigma^{-1}$ .

**Prop.** Damit wird  $\text{Ho}(\mathcal{C}_*)$  zu einer additiven Kategorie.

**Beweis.** Jedes Objekt  $X \in \text{Ob}(\text{Ho}(\mathcal{C}_*))$  ist natürlicherweise eine abelsche Gruppe:  $X \cong \Omega^2 \Sigma^2 X$ . □

**Bem.** Die Kowirkung von  $\Sigma X$  auf  $Z$  zu einer Kofasersequenz  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  in einer stabilen Modellkategorie ist schon durch  $\partial : Z \rightarrow \Sigma X$  gegeben:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\text{Kowirk}} & Z \vee \Sigma X \xrightarrow{\quad} Z \times \Sigma X \\ & \searrow & \nearrow (\text{id}, \partial) \end{array}$$

Produkt und Koprodukt fallen zusammen, da  $\text{Ho}(\mathcal{C}_*)$  additiv ist.

**Lem.** Sei  $\mathcal{C}_*$  stabil. Dann gilt

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X &\text{ ist Kofaserseq.} \\ \iff \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma g} \Sigma Z \xrightarrow{-\Sigma \partial} \Sigma^2 X &\text{ ist Kofaserseq.} \end{aligned}$$

**Prop.** Es gilt

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X &\text{ ist Kofaserseq.} \\ \iff \Omega Z \xrightarrow{-\partial^*} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \Sigma \Omega Z = Z &\text{ ist Faserseq.} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten fallen Faser- und Kofasersequenzen zusammen und  $\text{Ho}(\mathcal{C}_*)$  ist eine triangulierte Kategorie.

**Kor.** Ist  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$  ein exaktes Dreieck, so ist

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow [W, \Sigma^{-1} Z] \rightarrow [W, X] \rightarrow [W, Y] \rightarrow [W, Z] \rightarrow \\ &\rightarrow [W, \Sigma X] \rightarrow [W, \Sigma Y] \rightarrow [W, \Sigma Z] \rightarrow \dots \end{aligned}$$

eine lange exakte Sequenz.

**Def (Bousfield-Lokalisierung).** Sei  $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{M})$  eine Menge von Mor. einer Modellkat.  $\mathcal{M}$ . Dann heißt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  **S-lokal**, falls

$$\forall (A \xrightarrow{f} B) \in S : \text{Map}(B, X) \xrightarrow{f^*} \text{Map}(A, X) \text{ ist schwache } \check{\text{A}}\text{q.}$$

Weiter heißt  $f : A \rightarrow B$  eine **S-lokale Äquivalenz**, falls für alle  $S$ -lokalen Objekte  $X$  der Morphismus  $f^*$  wie eben eine schwache Äquivalenz ist. (Offensichtlich gilt dann  $S \subseteq \{ S\text{-lokale } \check{\text{A}}\text{q.} \}$ .) Ist dann  $\mathcal{M}$  links-eigentlich und kombinatorisch, so existiert eine Modellstruktur  $L_S \mathcal{M}$  auf  $\mathcal{M}$ , deren Kofaserungen diesselben sind wie von  $\mathcal{M}$  und deren schwachen Äq. die  $S$ -lokalen Äq. sind.

**Def.** Sei  $\mathcal{C}_*$  eine (punktierte), simpliziale, links-eigentliche, kombinatorische Modellkategorie. Die **Kategorie der Spektren**  $\mathcal{C}_*^\infty$  hat als Objekte Familien  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Objekten aus  $\mathcal{C}_*$  zusammen mit Morphismen  $(\alpha_i : \Sigma X_i \rightarrow X_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ . Wir schreiben

$$X^\infty : X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow X_2 \dashrightarrow \dots$$

Ein Morphismus besteht aus Morphismen  $(X_i \rightarrow X'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , welche mit den  $\alpha_i$  und  $\alpha'_i$  verträglich sind.

**Bsp.** Sei  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}_*)$ . Dann heißt

$\Sigma^\infty X : X \dashrightarrow \Sigma X \dashrightarrow \Sigma^2 X \dashrightarrow \dots$  **Einhängungsspektrum** von  $X$ .

Das **Sphärenspektrum** ist  $\mathbb{S}^\infty := \Sigma^\infty \mathbb{S}^0$ .

**Def.** Die **projektive Modellstruktur** auf  $\mathcal{C}_*^\infty$  ist diejenige, für die gilt: Ein Mor.  $f : X^\infty \rightarrow Y^\infty$  ist eine

- schwache Äq.  $\iff$  alle  $f_i : X_i^\infty \rightarrow Y_i^\infty$  sind schw. Äq.
- Faserung  $\iff$  alle  $f_i : X_i^\infty \rightarrow Y_i^\infty$  sind Faserungen.

**Def.** Ein Spektrum  $X^\infty$  heißt  $\Omega$ -Spektrum, falls alle  $\alpha_i^* : X_i \rightarrow \Omega X_{i+1}$  schwache Äquivalenzen sind.

**Lem.** Es gibt eine Klasse  $S \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C}_*^\infty)$ , sodass gilt:

$$X^\infty \text{ ist } S\text{-lokal} \iff X^\infty \text{ ist ein } \Omega\text{-Spektrum.}$$

*Bem.* Damit existiert die Bousfield-Lokalisierung der projektiven Modellstruktur auf  $\mathcal{C}_*^\infty$  nach den  $\Omega$ -Spektren. Diese Modellstruktur ist die übliche Modellstruktur auf  $\mathcal{C}_*^\infty$ .

**Satz.** Mit dieser Modellstr. wird  $\mathcal{C}_*^\infty$  zu einer stabilen Modellkat.

TODO: Eilenberg-MacLance-simpliziale-Mengen ( $K(G, n)$ 's)

TODO: Dold-Kan vom Übungsblatt

## Anhang: Die Ordinalzahlen

**Def.** Eine **Wohlordnung** auf einer Menge  $S$  ist eine Totalordnung auf  $S$  bezüglich der jede nichtleere Teilmenge  $A \subseteq S$  ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel  $(S, \leq)$  bestehend aus einer Menge  $S$  und einer Wohlordnung  $\leq$  auf  $S$ .

*Bem.* Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in  $S$  keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen  $\dots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \dots$

*Bem.* Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

**Axiom** (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

**Def.** Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

**Def.** Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

*Bem.* Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit  $\mathcal{O}_n$  bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \rightarrow (T, \leq_T)$ .

**Notation.**  $\bullet 0 := [\emptyset]$ ,  $\bullet n := [\{1, \dots, n\}]$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bullet \omega := [\mathbb{N}]$  mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

*Bem.* Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

**Prinzip (Transfinite Induktion).**

Sei  $P : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{Prop}$  eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

**Def.** Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:

Für  $\alpha = [(S, \leq_S)]$  und  $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$  ist

$\bullet \alpha + \beta := [(S \amalg T, \leq_{S \amalg T})]$ , wobei gilt:

$$\leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$

$\bullet \alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$  mit der lexikogr. Ordnung

$$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$

$\bullet \alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \rightarrow T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$  mit

$$f < g \iff \exists t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

*Bem.* Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

- Die Null  $0 := [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$ .
- Die Nachfolgerzahl  $\alpha + 1$  einer Zahl  $\alpha \in \mathcal{O}_n$ .
- Die Limeszahl  $\lim A := \sup A$  einer Teilmenge  $A \subset \mathcal{O}_n$ .

*Bem.* Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} \\ \alpha + 0 := \alpha & \alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1 & \alpha + \lim A := \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\} \\ \alpha \cdot 0 := 0 & \alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha & \alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\} \\ \alpha^0 := 1 & \alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha & \alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\} \end{array}$$

**Def.** Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel  $(S, +, \cdot, 0)$ , sodass  $(S, +, 0)$  ein Monoid und  $(S, \cdot)$  eine Halbgruppe ist mit

$$\bullet a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \bullet a \cdot 0 = 0.$$

**Lem** (Rechenregeln in  $\mathcal{O}_n$ ).  $\bullet \alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$   $\bullet \alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$   
 $\bullet \alpha^0 = 1$   $\bullet 0^\alpha = 0$  für  $\alpha > 0$   $\bullet 1^\alpha = 1$   $\bullet \alpha^1 = \alpha$   
 $\bullet \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$   $\bullet (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\bullet \mathcal{O}_n$  ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- $\bullet$  Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht!*
- $\bullet$  Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- $\bullet$  Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- $\bullet$  Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$$\forall \beta < \gamma : \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \quad (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \quad (\alpha > 1).$$

**Lem.** Jedes  $\alpha \in \mathcal{O}_n$  kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $\beta_1 > \dots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$ .