Zusammenfassung Petrinetze

Dies ist eine Zusammenfassung zur gleichnamigen Vorlesung von Professor Dr. Walter Vogler im Wintersemester 2016/17.

Def. Ein **Netzgraph** ist ein Tripel (S, T, W), wobei S und T disjunkte, endliche Mengen sind und $W : S \times T \cup T \times S \to \mathbb{N}$. Dadurch ist ein gerichteter, gewichteter, bipartiter Graph mit Kantenmenge $F = \{(x, y) \mid W(x, y) \neq 0\}$ gegeben.

Notation	Bezeichnung	Symbol
$t \in T$	**Transition**	□
$s \in S$	**Stelle**, **Platz**	◯
$(x, y) \in F$	**Kante**	$\to$ falls $W(x, y) = 1$
		$\xrightarrow{w}$ falls $w := W(x, y) > 1$

Def. Sei $x \in S \cup T$.

- ${}^\bullet x := \{y \mid (y, x) \in F\}$ heißt **Vorbereich** von x und
- $x^\bullet := \{y \mid (x, y) \in F\}$ heißt **Nachbereich** von x.
- x heißt **isoliert**, falls ${}^\bullet x \cup x^\bullet = \emptyset$.
- x heißt **vorwärts-verzweigt**, falls $|x^\bullet| \geq 2$
- x heißt **rückwärts-verzweigt**, falls $|{}^\bullet x| \geq 2$

Def. $(s, t) \in S \times T$ bilden eine **Schlinge** falls $\{(s, t), (t, s)\} \subseteq F$

Def. Eine **Markierung** ist eine Abbildung $M : S \to \mathbb{N}$.
Eine Teilmenge $S' \subseteq S$ heißt **markiert** unter M, falls $\exists\, s \in S' : M(s') > 0$, andernfalls *unmarkiert*.
Ein Element $s \in S$ heißt *(un-)markiert*, falls $\{s\} \subseteq S$ es ist.

Notation. $\mathfrak{M}(S) := \{M : S \to \mathbb{N}\}$

Def. Ein **Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N)$ besteht aus

- einem Netzgraphen (S, T, W) und
- einer *Anfangsmarkierung* $M_N : S \to \mathbb{N}$.

Notation. Für eine feste Transition $t \in T$ ist

$$t^- : S \to \mathbb{N},\ \ s \mapsto W(s, t), \qquad t^+ : S \to \mathbb{N},\ \ s \mapsto W(t, s)$$

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt **aktiviert** unter einer Markierung M, notiert $M[t\rangle$, falls

$$\forall\, s \in S : W(s, t) \leq M(s) \iff t^- \leq M.$$

Ist t aktiviert, so kann t *schalten* und es entsteht die *Folgemarkierung* $M' := M + \Delta t$, wobei

$$\Delta t : S \to \mathbb{Z},\ \ s \mapsto W(t, s) - W(s, t).$$

Notation. $M[t\rangle M'$

Def. Für $w = t_1 \cdots t_n \in T^*$ und Markierungen M und M' gilt

$$M[w\rangle M' \ \ :\iff \ M[t_1\rangle M_1[t_2\rangle \cdots [t_{n-1}\rangle M_{n-1}[t_n\rangle M'$$

für (eindeutig bestimmte) Markierungen $M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Def. Ein Wort $w \in T^*$ heißt **Schaltfolge** (*firing sequence*) von N, notiert $M_N[w\rangle$, falls $\exists\, M' : M_N[w\rangle M'$.

Notation. $[M\rangle := \{M' \mid \exists\, w \in T^* : M[w\rangle M'\}$
$\mathrm{FS}(N) := \{w \in T^* \mid M_N[w\rangle\}$ für ein Petrinetz N

Def. M' heißt **erreichbar** von M, falls $M' \in [M\rangle$.

Def. $w \in T^\omega$ heißt **unendliche Schaltfolge** von N, falls alle endlichen Präfixe von w Schaltfolgen von N sind.

Def. Eine Schaltfolge ist **maximal**, falls sie endlich ist und in einer toten Markierung endet *oder* unendlich ist.
Eine Schaltfolge ist **schwach/stark fair** für eine Trans. $t \in T$ falls

- sie endlich ist und in einer Markierung endet, die t nicht aktiviert
- *oder* t unendlich ist und t unendlich oft deaktiviert ist / t nur endlich oft aktiviert ist
- *oder* t unendlich oft enthält.

Die Schaltfolge heißt *schwach/stark fair*, falls sie für jede Transition schwach/stark fair ist.

Bem. stark fair $\implies$ schwach fair $\implies$ maximal

Def. Der **Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{R}(N)$ zu N besitzt die Knoten $[M_N\rangle$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists\, t : M[t\rangle M'\}$.

Def. $\mathrm{Parikh} : A^* \to \mathbb{N}^A$, $\ \mathrm{Parikh}(w)(a) := |\{i \mid w_i = a\}|$

Lem. In $M[w\rangle M'$ hängt M' nur von M und $\mathrm{Parikh}(w)$ ab, genauer

$$M' = M + \textstyle\sum_{t \in T} \mathrm{Parikh}(w)(t) \cdot \Delta t.$$

Lem. $M_1[w\rangle M_2 \implies M + M_1[w\rangle M + M_2$

Lem. Sei N ein Petri-Netz. Dann gilt:

- $\mathrm{FS}(N)$ ist *präfix-abg.*, d. h. $w = vu \in \mathrm{FS}(N) \implies v \in \mathrm{FS}(N)$.
- Ist $[M_N\rangle$ endlich, so ist $\mathrm{FS}(N)$ regulär.

Def. Ein **beschriftetes Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N, \ell)$ best. aus

- einem Petrinetz (S, T, W, M_N) und
- einer Transitionsbeschriftung (*labelling*) $\ell : T \to \Sigma \cup \{\lambda\}$, wobei Σ eine Menge von *Aktionen* ist.

Sprechweise. $t \in T$ mit $\ell(t) = \lambda$ heißt *intern* oder *unsichtbar*.

Notation. Für $t \in T^*$ ist $\ell(w) := \ell(t_1) \cdots \ell(t_n) \in \Sigma^*$.
Dabei wird λ als das leere Wort in Σ^* aufgefasst.

Def. Mit $t \in T$, $w \in T^*$ und Markierungen M, M' ist definiert:

$$\frac{M[t\rangle M'}{M[\ell(t)\rangle\rangle M'} \qquad \frac{M[t\rangle}{M[\ell(t)\rangle\rangle} \qquad \frac{M[w\rangle M'}{M[\ell(w)\rangle\rangle M'} \qquad \frac{M[w\rangle}{M[\ell(w)\rangle\rangle}$$

Def. Die **Sprache** eines beschrift. Netzes N ist

$$L(N) := \{v \in \Sigma^* \mid M_n[v\rangle\rangle\}.$$

Def. Ein **beschriftetes Netz mit Endmarkierung** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \ell, \mathrm{Fin})$ wobei (S, T, W, M_N, ℓ) ein beschriftetes Netz und $\mathrm{Fin} \subseteq \mathfrak{M}(S)$ eine endl. Menge von *Endmarkierungen* ist.
Die entspr. Sprache ist $L_{\mathrm{fin}}(N) := \{v \in \Sigma^* \mid \exists\, M \in \mathrm{Fin} : M_N[v\rangle M\}$.

Notation. $\mathfrak{L}^\lambda := \{L_{\mathrm{fin}}(N) \mid N$ beschrift. Netz mit Endmarkierung$\}$
$\mathfrak{L} := \{L_{\mathrm{fin}}(N) \mid N$ beschrift. Netz mit Endmark. ohne interne Trans.$\}$

Satz. $\{$ reguläre Sprachen $\} \subseteq \mathfrak{L}$

Nebenläufigkeit I

Def. Eine Multimenge über X ist eine Funktion $\mu : X \to \mathbb{N}$.

Notation. $\mathfrak{M}(X) := \{\mu : X \to \mathbb{N}\}$
$\mu_Y \in \mathfrak{M}(X)$, $\mu_Y(x) := |\{\star \mid x \in Y\}|$ für $Y \subset X$,
$\emptyset := \mu_\emptyset \in \mathfrak{M}(X)$, $\quad \mu_x := \mu_{\{x\}} \in \mathfrak{M}(X)$ für $x \in X$

Def. Ein **Schritt** μ ist eine Multimenge $\mu \neq \emptyset \in \mathfrak{M}(T)$.
Der Schritt μ ist **aktiviert** unter M, notiert $M[\mu\rangle$, falls

$$\forall\, s \in S : \mu^-(s) := \textstyle\sum_{t \in T} \mu(t) W(s, t) \leq M(s).$$

Durch *Schalten* von μ entsteht die Folgemarkierung $M' \in \mathfrak{M}(S)$ mit

$$M'(s) = M(s) + \textstyle\sum_{t \in T} \mu(t) \cdot (W(t, s) - W(s, t)).$$

Bem. Analog wird verallgemeinert: $M[\mu\rangle M'$, $M[w\rangle$, $M[w\rangle M'$ für $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\}$ bzw. $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^*$.

Def. $\mathrm{SS}(N) := \{w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^* \mid M_N[w\rangle\}$ heißen **Schrittfolgen** (*step sequences*).

Def. Zwei Transitionen $t, t' \in T$ mit $M[t\rangle$ und $M[t'\rangle$ sind

- **nebenläufig** *unter* M, falls $M[t + t'\rangle$,
- **in Konflikt** *unter* M, falls $\neg M[t + t'\rangle$.

Notation. Für $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ ist $\ell(\mu)$ die Multimenge mit

$$\ell(\mu) : \Sigma \to \mathbb{N},\ \ x \mapsto \textstyle\sum_{t \in T, \ell(t) = x} \mu(t)$$

(falls die rechte Zahl endlich ist für alle $x \in \Sigma$).
Für $w = \mu_1 \cdots \mu_n \in \mathfrak{M}(T)^*$ ist $\ell(w) := \ell(\mu_1) \cdots \ell(\mu_n)$.

Def. Mit $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{0\}$, $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{0\})^*$ und M, M' ist defin.:

$$\frac{M[\mu\rangle M'}{M[\ell(\mu)\rangle\rangle M'} \qquad \frac{M[\mu\rangle}{M[\ell(\mu)\rangle\rangle} \qquad \frac{M[w\rangle M'}{M[\ell(w)\rangle\rangle M'} \qquad \frac{M[w\rangle}{M[\ell(w)\rangle\rangle}$$

Lem. $M[t_1\rangle, \ldots, M[t_n\rangle \wedge \forall\, i \neq j : {}^\bullet t_i \cap {}^\bullet t_j = \emptyset \implies M[t_1 + \ldots t_n\rangle$

Lem. $M[\mu\rangle M' \wedge \mathrm{Parikh}(w) = \mu \implies M[w\rangle M'$

Bem. Über Schrittfolgen werden somit dieselben Markierungen erreicht wie über Schaltfolgen.

Def. Der **schrittweise Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{S}\mathfrak{R}(N)$ besitzt die Knoten $[M\rangle$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists\, \mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\} : M[\mu\rangle M'\}$.

Lem. Sei N schlingenfrei. Dann gilt:

$$(\forall\, w \in T^*, \mathrm{Parikh}(w) = \mu : M[w\rangle) \iff M[\mu\rangle$$

Def. Eine Stelle $s \in S$ heißt **n-beschränkt** / **beschränkt**, falls

$$\sup\{M(s) \mid M \in [M_N\rangle\} \leq n \quad / \quad \sup\{M(s) \mid M \in [M_N\rangle\} < \infty.$$

Ein Netz heißt (n-) *beschränkt*, wenn alle Stellen $s \in S$ (n-) beschränkt sind. Ein Netz heißt **sicher**, wenn es 1-beschränkt ist. Ein Netz heißt **strukturell beschränkt**, wenn es bei beliebig geänderter Anfangsmarkierung beschränkt ist.

Prop. $[M_N\rangle$ endlich $\iff$ N beschränkt

Lebendigkeit

Def. Sei $t \in T$ eine Trans. in einem Netz N und M eine Markierung.

- t heißt **tot** (oder *0-lebendig*) *unter* M, falls $\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, \neg M'[t\rangle$.
- t heißt *1-lebendig unter* M, falls $\exists\, w \in T^* \,:\, M[wt\rangle$
- t heißt *2-lebendig unter* M, falls

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \exists\, w_1, \ldots, w_n \in T^* \,:\, M[w_1 t w_2 t \cdots w_n t\rangle$$

- t heißt *3-lebendig unter* M, falls eine unendliche Schaltfolge w existiert, $M[w\rangle$, die t unendlich oft enthält.
- t heißt **(4-) lebendig** *unter* M, falls

$$\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, \neg(t \text{ ist tot unter } M)$$

- t heißt *lebendig*, falls t lebendig unter M_N ist.

Bem. t 4-lebendig $\implies$ t 3-lebendig $\implies$ t 2-lebendig $\implies$ t 1-lebendig $\iff$ $\neg$ (t 0-lebendig)

Def. Bezogen auf eine Markierung M:

- M heißt *tot*, falls alle Transitionen unter M tot sind.
- M heißt *lebendig*, wenn alle $t \in T$ unter M lebendig sind.
- M heißt **monoton lebendig**, wenn alle $M' \geq M$ lebendig sind.

Bem. M ist tot $\iff$ $\forall\, t \in T \,:\, \neg M[t\rangle$

Def. Bezogen auf ein Netz N:

- N heißt *tot*, falls M_N tot ist.
- N heißt **verklemmungsfrei**, falls $\forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, \neg(M \text{ tot})$
- N heißt *lebendig*, wenn M_N lebendig ist.
- N heißt *monoton lebendig*, wenn M_N monoton lebendig ist.

S- und T-Invarianten

Def. Die **Inzidenzmatrix** *eines Netzes* N ist die Matrix $C(N) \in \mathbb{Z}^{T \times S}$ mit $C(N)_{st} = \Delta t(s)$ für $s \in S$ und $t \in T$.

Bem. Folglich ist $\Delta t = C(N) \cdot t$ (wenn man t als One-Hot-Vektor auffasst) und für $M[w\rangle M'$ ist $M' = M + C(N) \cdot \text{Parikh}(w)$.

Def. Eine **S-Invariante** $y : S \to \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N)^T \cdot y = 0$. Der **Träger** $\text{supp}(y)$ *einer S-Invarianten* y ist $\{s \in S \,|\, y(s) \neq 0\}$.

Notation. $S\text{-Inv}(N) \coloneqq \{\ S\text{-Invarianten von } N\ \} = \ker(C(N)^T)$

Lem/Def. Das Netz N heißt **von S-Invarianten überdeckt**, falls folgende äquivalente Bedingungen gelten:

- N besitzt eine positive (d. h. $\forall\, s \in S \,:\, y(s) > 0$) S-Invariante.
- Für alle $s \in S$ gibt es eine nichtnegative (d. h. $\forall\, s \in S \,:\, y(s) \geq 0$) S-Invariante mit $s \in \text{supp}(y)$.

Lem. Für $y \in \mathbb{Z}^S$ gilt

$$y \in S\text{-Inv}(N) \implies \forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, y^T \cdot M = y^T \cdot M_N.$$

Ist jede Transition in N 1-lebendig, so gilt auch die Rückrichtung:

$$y \in S\text{-Inv}(N) \iff \forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, y^T \cdot M = y^T \cdot M_N$$

Bem. Das Lemma kann verwendet werden um zu zeigen, dass eine Markierung M nicht erreichbar ist.

Lem. Sei $s \in S$ und $y \in S\text{-Inv}(N)$ nichtnegativ mit $y(s) > 0$. Dann ist s beschränkt, genauer $(y^T \cdot M_N / y(s))$-beschränkt.

Satz. Ist N von S-Invarianten überdeckt, so ist N strukturell beschränkt. Besitzt N eine lebendige Markierung, so gilt sogar:

$$N \text{ ist strukturell beschr.} \iff N \text{ ist von } S\text{-Invarianten überdeckt.}$$

Def. Ein **home state** ist eine Markierung M mit

$$\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, M \in [M'\rangle.$$

Ein Netz N heißt **reversibel**, wenn M_N ein home state ist.

Lem. Angenommen, N ist reversibel und keine Transitionen sind tot unter M_N. Dann ist N lebendig.

Bem. Es gibt lebendige, sichere Netze, die *nicht* von S-Invarianten überdeckt sind.

Def. Eine **T-Invariante** $x : T \to \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N) \cdot x = 0$. Das Netz N heißt **von T-Invarianten überdeckt**, wenn es eine positive T-Invariante gibt.

Notation. $T\text{-Inv}(N) \coloneqq \{\ T\text{-Invarianten von } N\ \} = \ker(C(N))$

Lem. Sei $w \in T^*$ mit $M[w\rangle M'$. Dann gilt:

$$\text{Parikh}(w) \in T\text{-Inv}(N) \iff M = M'$$

Satz. Ist N lebendig und beschränkt, so ist N von T-Invarianten überdeckt.

State Transition Graphs

Def. Ein **State Transition Graph** (STG) mit *Eingangssignalmenge* I und *Ausgangssignalmenge* O ist ein sicheres Petri-Netz N, dessen Transitionen mit *Signalflanken* $a+$ oder $a-$ mit $a \in A \coloneqq I \cup O$ beschriftet sind, d. h.

$$\Sigma = \{a+ \,|\, a \in A\} \cup \{a- \,|\, a \in A\}.$$

Def. Der STG N heißt **konsistent**, falls es für jede erreichbare Markierung $M \in [M_N\rangle$ einen Code $C(M) \in \{0,1\}^A$ gibt, sodass

- $C(M_N)(a) = 0$
- $M[a+\rangle\rangle M' \implies C(M)(a) = 0 \wedge C(M')(a) = 1$
- $M[a-\rangle\rangle M' \implies C(M)(a) = 1 \wedge C(M')(a) = 0$

für alle Markierungen $M, M' \in [M_N\rangle$ und Signale $a \in A$.

Bem. Der Code ist (im Falle der Existenz) eindeutig bestimmt durch

$$C(M)(a) \coloneqq |\{i \,|\, w_i = a+\}| - |\{i \,|\, w_i = a-\}|$$

für ein $w \in \Sigma^*$ mit $M_N[w\rangle\rangle M$.

Beob. Ist der STG N konsistent, so gibt es

1. kein $w = u\,a{+}\,v\,a{+} \in \Sigma^*$ mit $u \in \Sigma^*$ und $v \in (\Sigma \setminus \{a-\})$,
2. kein $w = u\,a{-}\,v\,a{-} \in \Sigma^*$ mit $u \in \Sigma^*$ und $v \in (\Sigma \setminus \{a+\})$ und
3. kein $w = u\,a{-} \in \Sigma^*$ mit $u \in (\Sigma \setminus \{a+\})^*$

sodass jeweils $M_N[w\rangle\rangle$ gilt.

Def. Der STG N **hat CSC** (*Complete State Coding*), falls für alle $M, M' \in [M_N\rangle$ mit $C(M) = C(M')$ und *Ausgabesignale* $a \in O$ gilt:

$$M[a+\rangle \iff M'[a+\rangle \quad \text{bzw.} \quad M[a-\rangle \iff M'[a-\rangle.$$

Ansonsten hat N einen *CSC-Konflikt.*

Def. Der STG hat einen **IO-Konflikt**, falls eine Markierung $M \in [M_N\rangle$ und Transitionen $t_i \in \Sigma_I \coloneqq \{a+ \,|\, a \in I\} \cup \{a- \,|\, a \in I\}$ sowie $t_o \in \Sigma_O \coloneqq \{b+ \,|\, b \in O\} \cup \{b- \,|\, b \in O\}$ existieren, sodass t_i und t_o unter M in Konflikt stehen, d. h.

$$M[t_i\rangle \text{ und } M[t_o\rangle \text{ aber } \neg(M[t_i + t_o\rangle).$$

Einige Entscheidbarkeitsprobleme

Probleme. Gegeben sei eine Netz N

- **Erreichbarkeit** (E): ... und eine Markierung M. Frage: Ist M erreichbar in N, gilt also $M \in [M_N\rangle$?
- **0-Erreichbarkeit** (O-E): Frage: Ist $0 \in [M_N\rangle$?
- **Teilerreichbarkeit** (TE): ... eine Teilmenge $S' \subseteq S$ und $M : S' \to \mathbb{N}$. Frage: Gibt es ein $M \in [M_N\rangle$ mit $M|_{S'} = M'$?

Bem. Diese Probleme sind lösbar, falls der Erreichbarkeitsgraph endlich ist.

Def. • Ein Entscheidungsproblem A ist auf ein Entscheidungsproblem B **reduzierbar** (notiert $A \mapsto B$), falls ein Lösungsalgorithmus für A existiert, welcher einen (vllt. gar nicht existenten!) Lösungsalgorithmus für B verwenden darf.

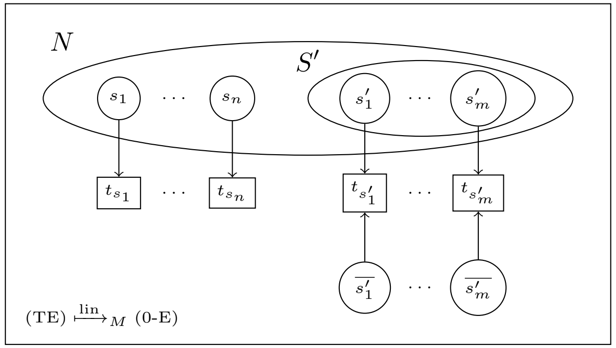
- A ist **linear / polynomiell many-one-reduzierbar** *auf* B, falls aus einer Instanz I von A in linearer / polynomieller Zeit eine Instanz I' von B berechnet werden kann, sodass die Antwort auf I gleich der Antwort auf I' ist.
  Notation: $A \overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M B$ / $A \overset{\text{poly}}{\longmapsto}_M B$

Satz. (0-E) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (E) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (TE) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (0-E)

Beweis ((TE) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (0-E))**.** Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{\overline{s'} \mid s' \in S'\} \\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_{s'} \mid s' \in S'\} \amalg \{t_s \mid s \in S \setminus S'\} \\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{s \to t_s \mid s \in S \setminus S'\} \cup \{s' \to t_{s'} \leftarrow \overline{s'} \mid s' \in S'\} \\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s), \;\; \overline{s'} \mapsto M'(s'))
\end{aligned}$$

Dann: M' teilerreichbar in $N \iff$ Nullmark. erreichbar in $\overline{N}$



Satz (schwierig!)**.** (E) ist entscheidbar.

Probleme. Gegeben sei ein Petrinetz N

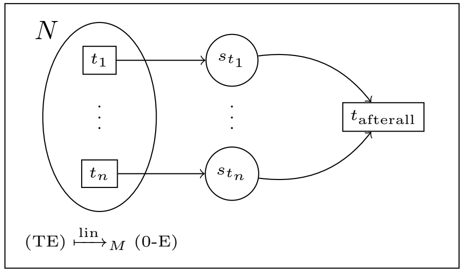
- **Lebendigkeit** (L): Frage: Ist N lebendig?
- **Einzellebendigkeit** (EL): ... und $t \in T$. Frage: Ist t lebendig?

Satz. (L) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (EL) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (L)

Beweis. „(L) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (EL)". Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{s_t \mid t \in T\} \\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_{\text{afterall}}\} \\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{t \to s_t \mid t \in T\} \cup \{s_t \to t_{\text{afterall}} \mid t \in T\} \\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s), \;\; s_t \mapsto 0)
\end{aligned}$$

Dann: N lebendig $\iff$ t_{afterall} lebendig in $\overline{N}$.



„(L) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (EL)". Beweisidee: Gefragt sei, ob eine Transition t_0 in Netz N lebendig ist. Erweitere N zu einem Netz $\hat{N}$, sodass jede Transition t aus N außer t_0 und jede neue Transition lebendig ist (indem man die nötigen Marken zum Schalten von t bereitstellt und nach dem Schalten die durch t erzeugten Marken entfernt).
Dann zeige: $\hat{N}$ lebendig $\iff$ t_0 lebendig in N.

Satz. (EL) ist reduzierbar auf (TE)

Beweisidee. Setze

$$\begin{aligned}
T_{t_0} &\coloneqq \{M \in \mathfrak{M}^\omega(N) \mid t_0 \text{ tot in } M\} \\
T_{t_0}^{\max} &\coloneqq \{M \in T_{t_0} \mid M \text{ ist maximal in } T_{t_0}\} \\
S'(M) &\coloneqq \{s \in S \mid M(s) < \infty\} \text{ für } M \in \mathfrak{M}^\omega(N)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& t_0 \text{ ist nicht lebendig} \\
\iff & \exists\, M \in [M_N\rangle : t \text{ tot in } M \\
\iff & \exists\, M \in [M_N\rangle : \exists\, M^\omega \in T_{t_0}^{\max} : M \leq M^\omega \\
\iff & \exists\, M^\omega \in T_{t_0}^{\max} : \exists\, M' \leq M^\omega|_{S'(M^\omega)} : M' \text{ teilerreichbar in } N
\end{aligned}$$

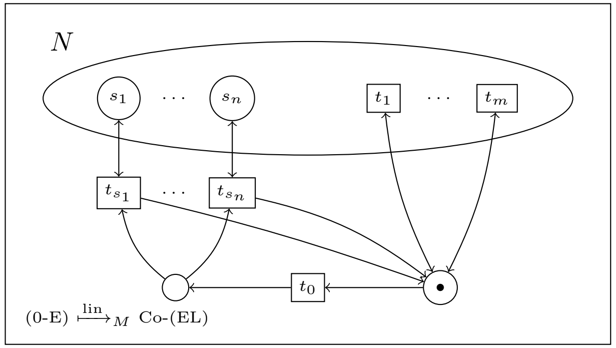
Nach dem Lemma von Dickson ist $T_{t_0}^{\max}$ endlich. Man kann zeigen, dass $T_{t_0}^{\max}$ auch berechenbar ist. Somit ist die Bedingung der letzten Zeile algorithmisch nachprüfbar.

Satz. (0-E) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ Co-(EL), das ist (EL) mit umgekehrter Antwort

Beweis. Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{s_{\text{s-ctrl}}, s_{\text{t-ctrl}}\} \\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_s \mid s \in S\} \amalg \{t_0\} \\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{t \rightleftarrows s_{\text{t-ctrl}} \mid t \in T\} \cup \{s \rightleftarrows t_s \mid s \in S\} \\
&\quad \cup \{s_{\text{s-ctrl}} \to t_s \to s_{\text{t-ctrl}} \mid s \in S\} \cup \{s_{\text{t-ctrl}} \to t_0 \to s_{\text{s-ctrl}}\} \\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s), \;\; s_{\text{s-ctrl}} \mapsto 0, \;\; s_{\text{t-ctrl}} \mapsto 1)
\end{aligned}$$

Dann: Nullmark. in N erreichbar $\iff$ t_0 in $\overline{N}$ nicht lebendig



Problem (**Spezielles Reproduktionsproblem** (SR))**.** Gegeben ein Netz N, gibt es eine nicht-leere Schaltfolge w mit $M_N[w\rangle M_N$?

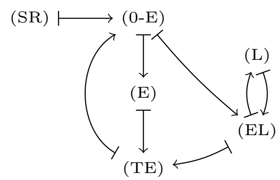
Satz. (SR) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (0-E)

Beweis. Konstruiere $\widetilde{N} = (\widetilde{S}, \widetilde{T}, \widetilde{W}, M_{\widetilde{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S} \coloneqq S \times \{\text{active}, \text{comparison}\} \amalg \{s_{\text{control}}\} \\
&\widetilde{T} \coloneqq T \times \{\text{one-shot}, \text{multiple}\} \amalg \{t_s \mid s \in S\} \\
&\widetilde{W}((t, \text{--}), (s, \text{active})) \coloneqq W(t, s), \qquad \widetilde{W}(s_{\text{control}}, (t, \text{one-shot})) \coloneqq 1, \\
&\widetilde{W}((s, \text{active}), (t, \text{--})) \coloneqq W(s, t) \qquad \widetilde{W}((s, \text{--}), t_s) \coloneqq 1, \\
&\widetilde{W}(\text{--}, \text{--}) \coloneqq 0 \text{ sonst}, \quad M_{\widetilde{N}}(s, \text{--}) \coloneqq M_N(s), \quad M_{\widetilde{N}}(s_{\text{control}}) \coloneqq 1
\end{aligned}$$

Dann gilt: $\exists\, w \in t^* \setminus \{\lambda\} : M_N[w\rangle M_N \iff 0 \in [M_{\widetilde{N}}\rangle$

Fazit. Im folgenden Bild sind alle Reduktionen eingezeichnet. Dabei handelt es sich um lineare Many-One-Reduktionen mit Ausnahme von (EL) $\mapsto$ (TE).



(L) und (EL) sind entscheidbar, aber mindestens so schwer wie (E), (0-E) und (TE).

Beschränktheit und Überdeckbarkeit

Lem (**Dickson**). $\leq$ ist eine Wohlquasiordnung auf $(\mathbb{N} \cup \{\omega\})^n$, d. h. für alle unendlichen Folgen $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{N} \cup \{\omega\})^n$ gibt es eine Teilfolge $(M_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $M_{i_j} \leq M_{i_{j+1}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Def. Ein **Weg** in einem Graphen (V, E) ist eine Folge $v_1 \ldots v_n$ in V mit $\forall\, i \neq j \,:\, v_i \neq v_j$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Def. Ein Graph (V, E) heißt **lokal endlich**, falls für alle $v \in V$ die Menge $\{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ endlich ist.

Lem (**König**). Sei (V, E) ein unendlicher, lokal endl. gericht. Graph und $v_0 \in V$ ein Knoten, sodass für alle $v \in V$ ein Weg von v_0 nach v existiert. Dann gibt es einen unendlichen Weg ausgehend von v_0.

Satz. N ist unbeschränkt $\iff$ $\exists\, M, M' \in [M_N\rangle \,:\, \exists\, w \in T^* \,:\, M[w\rangle M' \wedge M \leq M' \wedge M \neq M'$

Def. Eine **erweiterte Markierung** *von* N ist eine Abbildung

$$M : S \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}.$$

Notation. $\mathfrak{M}^\omega(S) \coloneqq \{$ erw. Mark. von N $\} \coloneqq (\mathbb{N} \cup \{\omega\})^S$

Def. Sei N ein Netz und M_1, M_2 erweiterte Markierungen.

- M_2 **überdeckt** M_1 $\;:\iff\;$ $M_1 \leq M_2$
- M_1 ist **überdeckbar** $\;:\iff\;$ $\exists\, M \in [M_N\rangle \,:\, M_1 \leq M$

Def. Eine Menge $S' \subseteq S$ heißt **simultan unbeschränkt**, falls

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, M \in [M_N\rangle \,:\, \forall\, s \in S \,:\, M(s) \geq n.$$

Def. Sei $N = (S, T, W, M_N)$ ein Netz. Ein **Überdeckungsgraph** von N ist ein kantenbeschrifteter, gericht. Graph $\mathrm{Cov}(N) = (V, E)$, der von folgendem (nichtdet.) Algorithmus berechnet wird:

$V \coloneqq \emptyset \subset \mathfrak{M}^\omega(S)$, $\quad A \coloneqq \{M_N\} \subset \mathfrak{M}^\omega(S)$,
$E \coloneqq \emptyset \subset \mathfrak{M}^\omega(S) \times T \times \mathfrak{M}^\omega(S)$,
$\textsc{pred} \coloneqq \mathrm{const}\,\mathbf{nil} \in (\mathfrak{M}^\omega(S) \cup \{\mathbf{nil}\})^{\mathfrak{M}^\omega(S)}$
while $A \neq \emptyset$ **do**
  wähle $M \in A$
  $A \coloneqq A \setminus \{M\}$, $\quad V \coloneqq V \cup \{M\}$
  for $t \in T$ mit $M[t\rangle$ **do**
    $M' \coloneqq M + \Delta t$, $\quad M^* \coloneqq M$
    while $M^* \neq \mathbf{nil} \wedge M^* \not\leq M'$ **do** $M^* \coloneqq \textsc{pred}(M^*)$
    if $M^* \neq \mathbf{nil}$ **then** $M' \coloneqq M' + \omega \cdot (M' - M^*)$
    $E \coloneqq E \cup \{(M, t, M')\}$
    if $M' \notin V \cup A$ **then** $A \coloneqq A \cup \{M'\}$, $\quad \textsc{pred}(M') \coloneqq M$

Satz. $\mathrm{Cov}(N)$ ist endlich ($\iff$ der Algorithmus terminiert)

Kor. Es ist entscheidbar, ob N beschränkt ist.

Beweis. Konstruiere $\mathrm{Cov}(N) = (V, E)$ wobei $V \subset \mathfrak{M}^\omega(S)$ endl. ist. Überprüfe, ob sogar $V \subset \mathfrak{M}(S)$ gilt. Falls ja, so ist $\mathfrak{R}(N) = \mathrm{Cov}(N)$ endlich. Falls nein, so gibt es M, M' wie im letzten Satz und N ist somit unbeschränkt.

Bem. Jedes $\mathrm{Cov}(N)$ ist (nach Einführen eines Fehlerzustandes und Kanten dorthin) ein determ. endl. Automat mit Startzustand M_N.

Def. $L(\mathrm{Cov}(N)) \subseteq T^*$ ist die Sprache der von einem $\mathrm{Cov}(N)$ akzeptierten Wörter.

Notation. $M_w \coloneqq$ durch $w \in L(\mathrm{Cov}(N))$ erreichter Zust. in $\mathrm{Cov}(N)$

Lem. $M_N[w\rangle M \implies w \in L(\mathrm{Cov}(N)) \wedge \forall\, s \in S \,:\, M_w(s) \in \{M(s), \omega\}$

Lem. Für alle M in $\mathrm{Cov}(N)$ u. alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M' \in [M_N\rangle$ mit

$$\begin{cases} M'(s) = M(s) & \text{falls } M(s) \neq \omega, \\ M'(s) > n & \text{falls } M(s) = \omega. \end{cases}$$

Kor.
- S' ist simultan unbeschränkt $\iff$ $(\mathrm{const}\,\omega) \in \mathrm{Cov}(N)$
- Sei $\tilde{M}$ eine Markierung von N. Dann gilt: $\tilde{M}$ ist überdeckbar in N $\iff$ $\tilde{M}$ wird von einem M in $\mathrm{Cov}(N)$ überdeckt
- t ist 1-lebendig in N $\iff$ t ist Kantenbeschriftung in $\mathrm{Cov}(N)$
- t ist 2-lebendig $\iff$ t ist Beschriftung in einem Kreis in $\mathrm{Cov}(N)$

Kor. Es sind anhand von $\mathrm{Cov}(N)$ entscheidbar:
- Simultane Unbeschränktheit
- Überdeckbarkeit von Markier.
- 1-Lebendigkeit und 2-Lebendigkeit von Transitionen

Strukturtheorie und Free-Choice-Netze

Konvention. In diesem Abschn. seien alle Kantengewichte 0 oder 1.

Def. Eine Teilmenge $R \subseteq S$ heißt

- **Siphon**, falls ${}^\bullet R \subseteq R^\bullet$ • **Falle**, falls $R^\bullet \subseteq {}^\bullet R$

Lem. • Ist R ein Siphon und unmarkiert unter M, so ist R unmarkiert unter allen $M' \in [M\rangle$.

- Ist R eine Falle und markiert unter M, so ist R markiert unter allen $M' \in [M\rangle$.

Beob. Angenommen, N hat keine isolierten Stellen. Ist $R \neq \emptyset$ ein Siphon und unmarkiert unter $M \in [M_n\rangle$, so ist N nicht lebendig.

Lem. Sei $T \neq \emptyset$ und M eine tote Markierung. Dann ist $R = M^{-1}(\{0\})$ ein nichtleerer, unmarkierter Siphon.

Lem. Sei $T \neq \emptyset$. Enthält jeder nichtleere Siphon eine markierte Falle, so ist N verklemmungsfrei.

Def. Ein Netz N mit Kantengewichten in $\{0, 1\}$ heißt

- **Free-Choice-Netz** (*FC-Netz*), falls
$$\forall t, t' \in T : t \neq t' \wedge s \in {}^\bullet t \cap {}^\bullet t' \implies {}^\bullet t = {}^\bullet t' = \{s\}.$$
- **erweitertes Free-Choice-Netz** (*EFC-Netz*), falls
$$\forall t, t' \in T : {}^\bullet t \cap {}^\bullet t' \neq \emptyset \implies {}^\bullet t = {}^\bullet t'.$$

Bem. Ist N ein EFC-Netz, $s \in S$, $t_1, t_2 \in s^\bullet$ und M eine Markierung, so gilt $M[t_1\rangle \iff M[t_2\rangle$.

Lem. Die Vereinigung von Siphons / Fallen ist wieder ein Siphon / eine Falle. Damit bilden Siphons / Fallen mit der Vereinigung einen beschränkten Halbverband.

Kor. • Jedes $R \subseteq S$ enthält eine größte Falle.

- $R \subseteq S$ enthält eine markierte Falle $\iff$ die größte Falle in R ist markiert

Def. Sei $P \subseteq S$ und $<$ eine Totalordnung auf P. Die durch $<$ induzierte **lexikographische Ordnung** $<_{\text{lex}}$ auf $\mathfrak{M}(S)$ ist
$$M_1 <_{\text{lex}} M_2 \;:\iff\; \exists p \in P : \quad \forall q < p : M_1(q) = M_2(q) \;\wedge\; M_1(p) < M_2(p).$$

Lem. $<_{\text{lex}}$ ist Noethersch (wohlfundiert)

Lem. Sei N ein EFC-Netz, $R \subseteq S$ und $Q \subseteq R$ die größte Falle in R. Dann gibt es eine Totalordnung $<$ auf $R \setminus Q$, sodass:
Für alle Markierungen M mit $M|_Q \equiv 0$ und $\exists t \in R^\bullet : M[t\rangle$ gilt
$$\exists M' \in [M\rangle : M' <_{\text{lex}} M \wedge M'|_Q \equiv 0.$$

Beweis. Setze $n := |R \setminus Q|$. Wähle

- $t_1 \in R^\bullet \setminus {}^\bullet R$ und $s_1 \in {}^\bullet t_1 \cap (R \setminus Q)$
- $t_2 \in (R \setminus \{s_1\})^\bullet \setminus {}^\bullet(R \setminus \{s_1\})$ und $s_2 \in {}^\bullet t_1 \cap (R \setminus (Q \cup \{s_1\}))$
- …
- $t_n \in (R \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-1}\})^\bullet \setminus {}^\bullet(R \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-1}\})$ und $s_n \in {}^\bullet t_1 \cap (R \setminus (Q \cup \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}))$

Definiere $<$ durch $s_n < \ldots < s_2 < s_1$. Für t mit $M[t\rangle$ gibt es ein maximales $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $s_i \in {}^\bullet t$. Da N EFC ist, gilt ${}^\bullet t_i = {}^\bullet t$. Somit existiert M' mit $M[t_i\rangle M'$. Es stimmen M und M' auf $Q \cup \{s_{i+1}, \ldots, s_n\}$ überein, aber $M'(s_i) < M(s_i)$. Also $M' <_{\text{lex}} M$.

Kor. Die Aussage des letzten Satzes gilt auch für alle Markierungen M mit $M|_Q \equiv 0$ und $\exists t \in R^\bullet : t$ ist 1-lebendig unter M, falls R ein Siphon ist.

Satz (Commoner). Sei N ein EFC-Netz ohne isol. Stellen. Dann:
$$N \text{ ist lebendig} \iff \text{jeder Siphon} \neq \emptyset \text{ enth. eine markierte Falle}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“. Sei R ein nichtleerer Siphon und $Q \subseteq R$ die größte Falle in R. Wähle $t \in R^\bullet$. Angenommen, $M_N|_Q \equiv 0$. Durch mehrmalige Anwendung des vorh. Korollar (beachte: t ist lebendig) erhalten wir eine unendliche absteigende Reihe $M_N >_{\text{lex}} M_1 >_{\text{lex}} \ldots$ im Widerspruch zur Noetherianität von $<_{\text{lex}}$.
„$\Leftarrow$“. Angenommen, t_0 ist nicht lebendig. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass t_0 tot und alle weiteren Transitionen entweder lebendig oder tot sind. Zeige: Für jede tote Transition t ist
$$R(t) := \{s \in {}^\bullet(t) \mid M_N(s) = 0 \wedge \forall t' \in {}^\bullet s : t' \text{ tot}\}$$
nichtleer. Wir definieren:
$$T_R^{(0)} := \{t_0\}, \;\; R^{(i)} := \textstyle\bigcup_{t \in T_R^{(i)}} R(t), \;\; T_R^{(i+1)} := T_R^{(i)} \cup \bigcup_{s \in R^{(i)}} {}^\bullet s$$
Dann ist $R := \bigcup_{i \geq 0} R^{(i)}$ ein unmarkierter Siphon. Somit sind auch alle Fallen in R unmarkiert (und immer unmarkiert gewesen).

Kor. Jedes lebendige EFC-Netz ist monoton lebendig.

Netzvariationen

Def. Ein **High-Level-Netz** N ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von *Stellen*,
- eine endliche Menge T von *Transitionen*,
- eine Menge L von *Marken* (eine *Markierung* von N ist gegeben durch eine Multimenge von L für jede Stelle von N, also durch eine Abbildung in $\mathfrak{M}(L)^S$)
- für jede Transition $t \in T$ eine (berechenbare) *Transitionsregel* $r_t \subseteq \mathfrak{M}(S \times L) \times \mathfrak{M}(S \times L)$
- und eine *Anfangsmarkierung* $M_N : S \to \mathfrak{M}(L)$.

Def. Ein **Netz mit Zeit** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \tau)$, wobei

- (S, T, W, M_N) ein sicheres Petrinetz ist mit $\forall t \in T : {}^\bullet t \neq \emptyset$ und
- $\tau : T \to \mathbb{N}$ die **Latenzzeit** aller Transitionen angibt.

Ein **Zustand** von N ist ein Tupel (M, res), wobei M eine Markierung ist und $\text{res} : T \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die *Restzeit* jeder Transition angibt. Es gibt zwei verschiedene Schaltschritte:
$$(M, \text{res})[\sigma\rangle(M, \text{res}') \;:\iff\; \text{res} \geq 1 \wedge \text{res}' = \text{res} - 1 \qquad (\textbf{Zeitschritt})$$
$$(M, \text{res})[t\rangle(M', \text{res}') \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge \qquad (\textbf{Transition})$$
$$\wedge\, \text{res}'(t') = \begin{cases} \tau(t') & \text{falls } \neg(M[t'\rangle) \wedge M'[t'\rangle \\ \text{res}(t') & \text{falls } M[t'\rangle \wedge M'[t'\rangle \\ \infty & \text{falls } \neg(M'[t'\rangle) \end{cases}$$
Der Anfangszustand ist (M_N, res_N), wobei
$$\text{res}_N(t) := \begin{cases} \tau(t) & \text{falls } M_N[t\rangle \\ \infty & \text{falls } \neg(M_N[t\rangle) \end{cases}$$

Def. Ein **Netz mit Prioritäten** ist ein Petri-Netz $N = (S, T, W, M_N)$ mit einer Halbordnung $\sqsubset$.
Das Netz *schaltet unter Beachtung der Priorität*, falls
$$M[t\rangle_\sqsubset M' \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge \forall t' \in T : M[t'\rangle \implies t' \not\sqsubset t$$

Def. Ein **Netz mit Inhibitor-Kanten** ist ein Petri-Netz $N = (S, T, W, M_N)$ zusammen mit einer Menge $I \subseteq S \times T$ von *Inhibitor-Kanten*. Man definiert:
$$M[t\rangle_I M' \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge \forall s \in S : (s, t) \in I \implies M(s) = 0$$

Def. Eine **Zählermaschine** besteht aus $\mathbb{N}$-wertigen Registern $c_1, \ldots, c_n$ und einem Programm bestehend aus den Instruktionen

- $\text{INCR}(c_i)$ – erhöhe c_i um eins
- $\text{JZDEC}(c_i, m)$ – springe zu Adresse m, falls $c_i = 0$, ansonsten erniedrige c_i um eins.

Prop. Für jede Turingmaschine gibt es eine 2-Zählermaschine, die die Turingmaschine simuliert (bei passender Kodierung der Eingabe und Ausgabe).

Kor. Das Halteproblem für 2-Zählermaschinen ist unentscheidbar.

Lem. Zählermaschinen lassen sich als Netze mit Zeit, mit Prioritäten oder mit Inhibitor-Kanten kodieren.

Kor. Das Erreichbarkeitsproblem ist für solche Netze unentscheidbar.

Def. Ein **Netz mit Kapazitäten** ist ein Petri-Netz $N = (S, T, W, M_N)$ zusammen mit einer Abbildung $k : S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Man definiert:
$$M[t\rangle_k M' \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge M' \leq k$$

Nichtdeterminismus und modulare Konstruktion

Def. Zwei Netze N_1 und N_2 heißen **sprachäquivalent**, wenn

$$N_1 \sim_L N_2 \ :\iff\ L(N_1) = L(N_2).$$

Satz. Für beschränkte Netze ist Sprachäquivalenz entscheidbar.

Beweis. Für beschränkte Netze N ist $L(N)$ regulär (man erhält einen endlichen Automaten aus $\mathfrak{R}(N)$). Gleichheit von regulären Sprachen ist entscheidbar.

Bem. Sprachäquivalenz ist unzureichend für den Systemvergleich, denn es interessiert nicht nur, welche Aktionen ein Netz hintereinander ausführen kann, sondern auch in welchem Zustand es sich danach befindet und insbesondere welche Aktionen es dann in der Zukunft ausführen kann.

Def. Die **ready-Semantik** eines Netzes N ist

$$\mathrm{ready}(N) \coloneqq \{(w, X) \mid \exists\, M \,:\, M_N[w\rangle\rangle M \wedge X = \{a \in \Sigma \mid M[a\rangle\rangle\}\}.$$

N_1, N_2 heißen **ready-äquivalent**, falls $\mathrm{ready}(N_1) = \mathrm{ready}(N_2)$.

Def. Die **Failure-Semantik** (*Verweigerungssemantik*) eines Netzes N ist

$$\mathfrak{F}(N) \coloneqq \{(w, X) \mid X \subseteq \Sigma, \exists\, M \,:\, M_N[w\rangle\rangle M \wedge \forall\, a \in X \,:\, \neg M[a\rangle\rangle\}.$$

Dabei heißt X *Verweigerungsmenge*.
N_1, N_2 sind **failure-äquivalent** ($\mathfrak{F}$-äquivalent), falls

$$N_1 \sim_{\mathfrak{F}} N_2 \ :\iff\ \mathfrak{F}(N_1) = \mathfrak{F}(N_2).$$

Lem.
- $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), Y \subseteq X \implies (w, Y) \in \mathfrak{F}(N)$
- $(w, \emptyset) \in \mathfrak{F}(N) \iff w \in L(N)$
- $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), \forall\, a \in Y \,:\, (wa, \emptyset) \notin L(N) \implies (w, X \cup Y) \in \mathfrak{F}(N)$
- $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), Y \subseteq \Sigma \setminus \ell(T) \implies (w, X \cup Y) \in \mathfrak{F}(N)$

Lem. $(w, X) \in \mathfrak{F}(N) \iff \exists\, Y \subseteq \Sigma \setminus X \,:\, (w, Y) \in \mathrm{ready}(N)$

Satz. Ready-Äquivalenz $\implies$ $\mathfrak{F}$-Äquivalenz $\implies$ Sprachäquivalenz

Bem. Die Umkehrungen sind falsch.

Satz. Für beschränkte Netze ist Ready- und $\mathfrak{F}$-Äquiv. entscheidbar.

Beweisidee. Aus jedem Netz N kann man einen endlichen Automaten konstruieren, dessen Sprache kanonisch isomorph zu $\mathrm{ready}(N)$ bzw. $\mathfrak{F}(N)$ ist. Gleichheit von regulären Sprachen ist entscheidbar.

Def. Seien N_1 und N_2 mit Σ beschriftete Petrinetze und $A \subseteq \Sigma$. Die **parallele Komposition** *mit Synchronisation über* A ist das beschriftete Netz $N \parallel_A N_2 = (S, T, W, M_N, \ell)$ mit

- $S = S_1 \amalg S_2$
- $T = \begin{array}{ll} & \{(t_1, \lambda) \mid t_1 \in T_1, \ell_1(t_1) \notin A\} \\ \amalg & \{(\lambda, t_2) \mid t_2 \in T_2, \ell_2(t_2) \notin A\} \\ \amalg & \{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \mid \ell_1(t_1) = \ell_2(t_2) \in A\} \end{array}$
- $\begin{array}{rcll} W(s_1 \in S_1, (t_1, t_2)) & \coloneqq & W_1(s_1, t_1) & \text{falls } t_1 \in T_1 \\ W(s_2 \in S_1, (t_1, t_2)) & \coloneqq & W_2(s_2, t_2) & \text{falls } t_2 \in T_2 \\ W(s \in S, t \in T) & \coloneqq & 0 \ (\text{sonst}) & \\ W((t_1, t_2), s_1 \in S_1) & \coloneqq & W_1(t_1, s_1) & \text{falls } t_1 \in T_1 \\ W((t_1, t_2), s_2 \in S_1) & \coloneqq & W_2(t_2, s_2) & \text{falls } t_2 \in T_2 \\ W(t \in T, s \in S) & \coloneqq & 0 \ (\text{sonst}) & \end{array}$
- $M_N \coloneqq M_{N_1} \amalg M_{N_2}$
- $\begin{array}{rcl} \ell((t_1, t_2) \in T_1 \times T_2) & \coloneqq & \ell_1(t_1) = \ell_2(t_2) \\ \ell(t_1 \in T_1) & \coloneqq & \ell_1(t_1) \\ \ell(t_2 \in T_2) & \coloneqq & \ell_2(t_2) \end{array}$

Bem. Die Menge der mit Σ beschr. Netze wird mit $\parallel_A$ zu einem komm. Monoid mit neutralem Element $(S = \emptyset, T = \Sigma, -, -, \ell = \mathrm{id})$

Lem. Sei $N = N_1 \parallel N_2$, $M_1, M_1' \in \mathfrak{M}(S_1)$, $M_2, M_2' \in \mathfrak{M}(S_2)$ und $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \ldots, (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}) \in T_N$. Dann gilt:

$$M_1 \amalg M_2[(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \ldots, (t_1^{(n)}, t_2^{(n)})\rangle M_1' \amalg M_2'$$
$$\iff M_1[t_1^{(1)}, \ldots, t_1^{(n)}\rangle M_1' \wedge M_2[t_2^{(1)}, \ldots, t_2^{(n)}\rangle M_2'$$

Bem. Dabei gilt $M[\lambda\rangle M$ immer.

Lem. Sei $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Es gilt $M_1 \amalg M_2[a\rangle\rangle M_1' \amalg M_2'$ g. d. wenn
- Falls $a \in A$: $M_1[a\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[a\rangle\rangle M_2'$
- Falls $a \notin A$: $M_1[a\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[\lambda\rangle\rangle M_2'$ oder $M_1[\lambda\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[a\rangle\rangle M_2'$

Def. Seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann ist

$$u \parallel_A v \coloneqq \left\{ \begin{array}{c|l} w = w_1 \cdots w_n & u = u_1 \cdots u_n, v = v_1 \cdots v_n \text{ mit} \\ \in \Sigma^* & u_i, v_i \in \Sigma \cup \{\lambda\} \text{ sodass} \\ & \forall\, 1 \leq i \leq n \,:\, u_i = v_i = w_i \in A \\ & \qquad \vee u_i v_i = w_i \notin A \end{array} \right\}$$

Bem. Im Fall $u_i v_i = w_i$ gilt $u_i = \lambda$ oder $v_i = \lambda$.

Lem. Es sind äquivalent:
- in $N_1 \parallel_A N_2$ gilt $M_1 \amalg M_2[w\rangle\rangle M_1' \amalg M_2'$
- $\exists\, u, v \in \Sigma^* \,:\, M_1[u\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[v\rangle\rangle M_2' \wedge w \in u \parallel_A v$

Satz.
- $L(N_1 \parallel_A N_2) = \cup\{u \parallel_A v \mid u \in L(N_1), v \in L(N_2)\}$
- $\mathfrak{F}(N_1 \parallel_A N_2) = \left\{ (w, Z) \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\, (u, X) \in \mathfrak{F}(N_1), (v, Y) \in \mathfrak{F}(N_2) \,: \\ w \in u \parallel_A v \text{ und} \\ Z \cap A \subseteq X \cup Y \text{ und } Z \setminus A \subseteq X \cap Y \end{array} \right\}$

Kor. Sprach- und $\mathfrak{F}$-Äquivalenzen sind Kongruenzen bzgl. $\parallel_A$, d. h.

$$N_1 \sim_L N_1',\ N_2 \sim_L N_2' \implies (N_1 \parallel_A N_2) \sim_L (N_1' \parallel_A N_2')$$
$$N_1 \sim_{\mathfrak{F}} N_1',\ N_2 \sim_{\mathfrak{F}} N_2' \implies (N_1 \parallel_A N_2) \sim_{\mathfrak{F}} (N_1' \parallel_A N_2')$$

Bem. Dies ist wichtig für den modularen Entwurf von Systemen.

Def. Ein *beschriftetes* Netz heißt **verklemmungsfrei**, wenn

$$\forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, \exists\, a \in \Sigma \,:\, M[a\rangle\rangle.$$

Zwei Netze heißen **v-äquivalent**, falls beide verklemmungsfrei oder beide nicht verklemmungsfrei sind.

Lem. N ist verklemmungsfrei $\iff$ $\forall\, w \in \Sigma^* \,:\, (w, \Sigma) \notin \mathfrak{F}(N)$

Def. Zwei Netze N_1 und N_2 heißen **VA-äquivalent**, falls:
Für alle Netze N und alle $A \subseteq \Sigma$ gilt:
Die Netze $N_1 \parallel_A N$ und $N_2 \parallel_A N$ sind v-äquivalent.

Bem. Offensichtlich ist VA-Äquivalenz eine Kongruenz bzgl. $\parallel_A$.

Satz. $\mathfrak{F}$- und VA-Äquivalenz stimmen überein.

Beweisidee. Seien N_1 und N_2 VA-äquivalent.
Setze $A \coloneqq (\ell_1(T_1) \cup \ell_2(T_2)) \setminus \{\lambda\}$. Zeige:
Für alle $(w, X) \in A^* \times \mathcal{P}(A)$ gibt es ein Netz $N_{w,X}$, sodass für alle N' mit $l'(N') \setminus \{\lambda\} \subseteq A$ gilt:

$$N_{w,X} \parallel_A N' \text{ ist verklemmungsfrei} \iff (w, X) \notin \mathfrak{F}(N')$$

Dann gilt für alle (w, X) mit $N \coloneqq N_{w,X}$:

$$\begin{array}{ccc} (w, X) \notin \mathfrak{F}(N_1) & & (w, X) \notin \mathfrak{F}(N_2) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ N \parallel_A N_1 \text{ verklemmungsfrei} & \iff & N \parallel_A N_2 \text{ verklemmungsfrei} \end{array}$$