# Kurzfassung Riemannsche Geometrie



## Mannigfaltigkeiten

**Konvention.** $U_p$ ist eine Umgebung von $p$.

**Def.** Eine **topologische Mannigfaltigkeit** (Mft) der Dim. $m$ ist ein topologischer Raum $M^m$ mit folgenden Eigenschaften:

- $M^m$ ist **hausdorffsch**, d. h.
$$\forall x, y \in M^m : x \neq y \implies \exists U_x \Subset M^m : \exists U_y \Subset M^m : x \in U_x \wedge y \in U_y \wedge U_x \cap U_y = \emptyset.$$
- $M^m$ erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, d. h. es gibt eine abzählbare Menge $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$, sodass
$$\forall A \Subset M^m : \exists K \subset \mathbb{N} : A = \bigcup_{k \in K} U_k.$$
- $M^m$ ist **lokal euklidisch**, d. h. für alle $x \in M^m$ gibt es eine offene Umgebung $U_x$ von $x$ und einen Homöomorphismus $\phi : U_x \to \mathcal{O}$ mit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ offen.

*Bem.* lokal euklidisch $\not\Rightarrow$ hausdorffsch

**Lem.** Sei $M$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt
$$M \text{ zusammenhängend} \iff M \text{ wegzusammenhängend}.$$

**Def.**
- Sei $M$ eine $m$-dim. topol. Mft. Ein **Atlas** ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j : U_j \to \mathcal{O}_j) \mid j \in J\}$ mit $U_j \Subset M$ und $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ offen und Homöomorphismen $\phi_j$, für die gilt $\bigcup_{j \in J} U_j = M$.
- Die Paare $(U_j, \phi_j)$ werden **Karten** genannt.
- Für je zwei Karten $(U_j, \phi_j)$ und $(U_k, \phi_k)$ gibt es eine **Kartenwechselabbildung**
$$\phi_{kj} := \phi_k \circ \phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_j \cap U_k)} : \phi_j(U_j \cap U_k) \to \phi_k(U_j \cap U_k).$$
- Ein Atlas heißt **diff'bar**, wenn alle Kartenwechselabb. $\mathcal{C}^\infty$ sind.
- Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt **differenzierbare Struktur** von $M$, wenn gilt: Ist $(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})$ eine Karte von $M$ und $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})\}$ ein differenzierbarer Atlas, dann gilt $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.
- Eine topol. Mft versehen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

## Differenzierbare Abbildungen

**Notation.** Seien ab jetzt $M^m$ und $N^n$ differenzierbare Mften der Dimensionen $m$ und $n$.

**Def.**
- Eine Abb. $f : M \to N$ heißt in $x \in M$ **differenzierbar**, wenn es eine Karte $(U_x, \phi : U_x \to \mathcal{O}) \in \mathcal{A}_M$ und eine Karte $(\tilde{U}_{f(x)}, \tilde{\phi} : \tilde{U}_{f(x)} \to \tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{A}_N$ gibt, sodass
$$\tilde{\phi} \circ f|_{U_x} \circ \phi^{-1} : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}} \quad \text{differenzierbar } (\mathcal{C}^\infty) \text{ ist.}$$
- Die Abb. $f$ heißt **diff'bar**, wenn sie in allen $x \in M$ diff'bar ist.

**Notation.** $\mathcal{C}^\infty(M, N) := \{f : M \to N \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$

*Bem.* Die Definition ist unabh. von Wahl der Karten um $x$ und $f(x)$.

**Def.** Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn $f$ ein Homöomor. ist und $f$ und $f^{-1}$ differenzierbar sind.

**Def.** Sei $p \in M$. Zwei Funktionen $f : U_p \to \mathbb{R}$ und $g : V_p \to \mathbb{R}$ mit $U_p, V_p \Subset M$ heißen *äquivalent*, falls es eine offene Umgebung $W_p \subset U_p \cap V_p$ mit $f|_{W_p} = g|_{W_p}$ gibt. Die Äquivalenzklasse $[f]$ bezüglich der so definierten Äq'relation heißt **Funktionskeim** in $p$.

**Notation.** $\mathcal{C}^\infty(M, p) := \{[f] \mid [f] \text{ Funktionskeim in } p\}$

*Bem.* Die Menge der Funktionskeime ist eine $\mathbb{R}$-Algebra.

**Def.** Eine lineare Abb. $\delta : \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}$ heißt **Derivation**, falls
$$\forall [f], [g] \in \mathcal{C}^\infty(M, p) : \delta[f \cdot g] = \delta[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta[g].$$

**Def.** Der gewöhnliche *Tangentialraum* des $\mathbb{R}^n$ im Punkt $p$ ist
$$\tilde{T}_p\mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$
mit $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ und $\lambda \cdot (p, v) := (p, \lambda \cdot v)$.

**Def.** Der **Tangentialraum** von $M$ im Punkt $p \in M$ ist
$$T_pM := \{\partial : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, p) \to \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, derivativ}\}$$
Ein Element $v \in T_pM$ heißt **Tangentialvektor** an $M$ in $p$.

*Bem.* $T_pM$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir erhalten eine bilin. Abb.
$$T_pM \times \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}, \quad (v, [f]) \mapsto v.f := v[f].$$

**Satz.** Die Vektorräume $T_p\mathbb{R}^n$ und $\tilde{T}_p\mathbb{R}^n$ sind isomorph vermöge $\tilde{T}_p\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$, $(p, v) \mapsto \frac{\partial}{\partial v}|_p$. Insbesondere gilt $\dim(T_p\mathbb{R}^n) = n$.

**Kor.** Für eine $m$-dim. diff'bare Mft $M$ gilt: $\dim(T_pM) = m$.

*Bem.* Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann kann man $\dot{c}(0)$ auffassen als Tangentialvektor an $M$ in $c(0)$ mittels
$$\dot{c}(0)[f] := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ c).$$

*Bem.* Sei $(U, \phi)$ eine Karte und $p \in U$. Wir def. $\frac{\partial^\phi}{\partial x^i}|_p \in T_pM$ durch
$$\tfrac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p[f] := (\phi^{-1} \circ \alpha_i)^\cdot(0)[f] = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ \phi^{-1} \circ \alpha_i)$$
$$\text{mit } \alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \to U, \quad t \mapsto \phi(p) + te_i.$$

**Def.** Sei $f : M \to N$ diff'bar. Die **Ableitung** von $f$ in $p \in M$ ist
$$T_pf = f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N, \quad v \mapsto f_{*p}(v), \quad \text{wobei } f_{*p}(v).[g] := v.[g \circ f].$$

**Lem.** Sei $M$ eine diff'bare Mft, $p \in M$. Dann gilt
- $f_{*p}$ ist linear
- $(\mathrm{id}_M)_{*p} = \mathrm{id}_{T_pM}$
- *Kettenregel*: Seien $N$, $P$ diff'bare Mften. Dann gilt
$$\forall p \in M : (f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}.$$

**Kor.** Wenn $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus ist, dann ist $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein VR-Isomorphismus für alle $p \in M$.

**Satz.** Sei $M$ eine $m$-dimensionale Mft, $p \in M$ und $(U, \phi)$ eine Karte.
- Es gilt $T_pM = \{\dot{c}(0) \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ diff'bar}, c(0) = p\}$
- $\{\frac{\partial^\phi}{\partial x^i}|_p \mid i = 1, \ldots, n\}$ ist eine Basis von $T_pM$.

**Def.** $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ heißt **Tangentialbündel** von $M$.

**Def.** Die **Fußpunktabb.** ist die Proj. $\pi : TM \to M$, $v \in T_pM \mapsto p$.

# Vektorfelder

**Def.** Ein **Vektorfeld** (VF) auf $M$ ist eine Abbildung $X : M \to TM$, sodass $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Dies ist äquivalent zu $\forall p \in M : X(p) \in T_p(M)$.

**Lem.** Sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld, $(U, \phi)$ eine Karte. Dann gibt es Funktionen $\xi^j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ mit
$$\forall p \in U : X(p) = \sum_{j=1}^n \xi^j(p) \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^j}|_p.$$

**Def.**
- Ein VF $X$ auf $M$ heißt in $p \in M$ **diff'bar** (bzw. $\mathcal{C}^\infty$), wenn es eine Karte $(U, \phi)$ um $p$ gibt, sodass die Funktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n$ diff'bar (bzw. $\mathcal{C}^\infty$) sind.
- $X$ heißt **differenzierbar**, wenn $X$ in allen $p \in M$ diff'bar ist.

**Lem.** Wenn die Koordinatenfunktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n$ für eine bestimmte Karte $(U, \phi : U \to \mathcal{O})$ differenzierbar sind, dann sind sie es für jede andere Karte $(\tilde{U}, \psi : \tilde{U} \to \tilde{\mathcal{O}})$ mit $\tilde{U} \subseteq U$.

**Def.** Sei $M$ eine $m$-dimensionale diff'bare Mft mit diff'barer Struktur $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j) \mid j \in J\}$. Dann ist $TM$ eine $2m$-dimensionale Mft mit Atlas $\tilde{\mathcal{A}} := \{(\tilde{U}_j := \pi^{-1}(U_j), \tilde{\Phi}_j) \mid j \in J\}$, wobei
$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_j : \pi^{-1}(U_j) &\to \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^m, \\ \textstyle\sum_{k=1}^m \xi^k(p) \frac{\partial^{\phi_j}}{\partial x^k}|_p &\mapsto (\phi_j(p), \xi^1(p), \ldots, \xi^n(p)). \end{aligned}$$
Eine Menge $V \subseteq TM$ heißt *offen*, wenn $\tilde{\Phi}_j(V \cap \pi^{-1}(U_j)) \Subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist für alle $j \in J$.

**Notation.** $\mathcal{X}(M) := \{$ differenzierbare Vektorfelder auf $M$ $\}$

*Bem.* $\mathcal{X}(M)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR und ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul.

**Lem.** Jedes $X \in \mathcal{X}(M)$ induziert eine lineare, derivative Abb.
$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad \phi \mapsto X(\phi) := (p \mapsto X(p).[\phi]).$$

**Lem.** $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M) : (\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : X(f) = Y(f)) \iff X \equiv Y$

**Lem/Def.** Der **Kommutator** (oder **Lie-Klammer**) von $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ist das Vektorfeld $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$, das def. ist durch
$$[X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

**Satz.** Für $X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt
$$[X, Y_1 + fY_2] = [X, Y_1] + X(f) \cdot Y_2 + f \cdot [X, Y_2].$$

**Def.** Eine diff'bare Kurve $c : (a, b) \to M$ heißt **Integralkurve** von einem VF $X \in \mathcal{X}(M)$, falls $\forall t \in (a, b) : \dot{c}(t) = X_{c(t)}$.

**Lem/Def.** Sei $X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann hat das AWP
$$\dot{c}(t) = X_{c(t)}, \quad c(0) = p$$
eine eindeutige lokale Lösung $c = c_p^X : (-\epsilon, \epsilon) \to M$.

**Def.** $\Phi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $(p, t) \mapsto c_p^X(t)$ heißt **Fluss** von $X$.

# Lie-Algebren und Lie-Gruppen

**Def.** Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ mit einer $\mathbb{K}$-bilinearen Abbildung $[-,-] : V \times V \to V,\ (v,w) \mapsto [v,w]$ heißt **Lie-Algebra**, falls

- die Abb. antisymmetrisch ist, d. h. $\forall\, v,w \in V\ :\ [v,w] = -[w,v]$
- die **Jacobi-Identität** erfüllt ist, d. h.

$$\forall\, v,w,z \in V\ :\ [v,[w,z]] + [z,[v,w]] + [w,[z,v]] = 0.$$

**Bspe.** • $(\mathcal{X}(M), [-,-])$ ist eine Lie-Algebra.
• $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist eine Lie-Algebra mit $[A,B] \coloneqq AB - BA$.

**Def.** Eine Gruppe $G$, welche ebenfalls eine diff'bare Mft ist, heißt **Lie-Gruppe**, wenn folgende Abbildungen differenzierbar sind:

$$\mu : G \times G \to G,\ \ (g_1,g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2, \qquad \iota : G \to G,\ \ g \mapsto g^{-1}.$$

**Bsp.** Die allg. lin. Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n} \approx \mathbb{R}^{n^2}$ ist eine Lie-Gruppe. Die Diff'barkeit der Inv. folgt aus der Cramerschen Regel.

**Def.** Sei $G$ eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Dann sind

$$\ell g : G \to G, \quad x \mapsto g \cdot x = \mu(g,x)$$
$$rg : G \to G, \quad x \mapsto x \cdot g = \mu(x,g)$$

Diffeomorphismen mit Umkehrabbildung $\ell(g^{-1})$ bzw. $r(g^{-1})$.

**Bsp.** Abgeschl. Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sind Lie-Gruppen, z. B.
• $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ • $O_n \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ • $U_n \subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$

**Def.** Sei $f : M \to N$ ein Diffeomor. und $X \in \mathcal{X}(M)$. Dann heißt

$$f_*X : N \to TN,\ \ x \mapsto f_{*f^{-1}(x)}X(f^{-1}(x))$$

**Pushforward** von $X$ längs $f$.

**Def.** Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(G)$ heißt **linksinvariant**, wenn gilt:

$$\forall\, g,h \in G\ :\ X(g\cdot h) = \ell g_{*h} X(h) \quad (\text{kürzer: } \forall\, g \in G\ :\ \ell g_* X = X).$$

**Notation.** $\mathcal{L}(G) \coloneqq \{X \in \mathcal{X}(G) \mid X \text{ ist linksinvariant}\} \subset \mathcal{X}(G)$

*Bem.* Ein linksinv. VF $X \in \mathcal{X}(G)$ ist eindeutig bestimmt durch $X(e)$. Andererseits: Ist $x \in T_eG$, dann gibt es ein linksinv. VF $X \in \mathcal{X}(G)$ mit $X(e) = x$. Somit gibt es einen VR-Isomorphismus

$$i : \mathcal{L}(G) \to T_eG,\ \ X \mapsto X(e).$$

**Lem.** Seien $X, Y \in \mathcal{L}(G)$. Dann ist $[X,Y] \in \mathcal{L}(G)$.

**Kor.** $(\mathcal{L}(G), [-,-])$ ist eine $\dim(G)$-dimensionale Unter-Lie-Algebra von $(\mathcal{X}(G), [-,-])$.

**Notation.** $\mathfrak{G} \coloneqq \mathrm{Lie}(G) \coloneqq \mathcal{L}(G) \cong T_eG$

# Riemannsche Mannigfaltigkeiten

**Def.** Eine **Riemannsche Metrik** auf einer diff. Mft $M$ ist eine Familie $g = (g_p)_{p\in M}$ von Skalarprodukten $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, die differenzierbar von $p$ abhängt, d. h. für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ist $g(X,Y) : M \to \mathbb{R}, p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ differenzierbar ($\mathcal{C}^\infty$).
Das Tupel $(M,g)$ heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

*Bem.* Sei $(U,\phi)$ eine Karte von $M$. Setze

$$g_{ij}^\phi : U \to \mathbb{R},\ \ p \mapsto g(\tfrac{\partial^\phi}{\partial x^i}|_p, \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^j}|_p).$$

Seien $X = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial^\phi}{\partial x^i}$ und $Y = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial^\phi}{\partial x^j}$ zwei VF in $U$. Dann:

$$g(X,Y)(p) = g_p(X(p),Y(p)) = \sum_{i,j=1}^n v^i(p) w^j(p) g_{ij}(p).$$

**Def.** Seien $(M, g_M)$, $(N, g_N)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Isometrie**, wenn gilt:

- $f$ ist ein Diffeomorphismus
- $f$ erhält Riemannsche Metriken, d. h. für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ gilt:

$$g_M(X,Y) = g_N(f_*X, f_*Y) \circ f,$$

also $\forall\, p\in M\ :\ \forall\, v,w \in T_pM\ :\ g_{M,p}(v,w) = g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w))$.

**Def.** $\mathrm{Iso}(M) \coloneqq \{\tau : M \to M \mid \tau \text{ Isometrie}\}$ heißt **Isometriegruppe**.

*Bem.* $\mathrm{Iso}(M)$ ist in kan. Weise eine Lie-Gruppe (Myers-Steenrod).

**Satz.** Jede diff'bare Mannigfaltigkeit hat eine Riemannsche Metrik.

**Technik (Teilung der Eins).** Sei $M$ eine Mannigfaltigkeit. Es gibt eine Familie von stetigen Fktn $(\varphi_i : M \to [0,1])_{i\in I}$, sodass gilt:

- Für alle $x \in M$ gibt es eine Umgebung $U_p$, sodass alle bis auf endlich viele der Funktionen in $U_p$ verschwinden.
- Für alle $x \in M$ gilt $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$.
- Der Träger jeder Funktion ist in einer Karte enthalten.

**Bsp.** Das Oberer-Halbraum-Modell des *hyperbolischen Raums* ist

$$H^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, e_n\rangle_{\text{eukl}} > 0\} \Subset \mathbb{R}^n$$

mit dem offensichtlichen Atlas und der Riemannschen Metrik

$$g_p^{\text{Hyp}}((p,\tilde v),(p,\tilde w)) \coloneqq \frac{\langle \tilde v, \tilde w\rangle_{\text{eukl}}}{\langle p, e_n\rangle^2_{\text{eukl}}}.$$

**Def.** Eine diff'bare Abb. $f : M \to N$ zwischen diff'baren Mften heißt **Immersion**, falls $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ f. a. $p \in M$ injektiv ist.

**Def.** Angenommen, $N$ ist sogar eine Riem. Mft mit Metrik $g_N$. Dann erhalten wir eine Riem. Metrik auf $M$, die mit $f$ **zurückgeholte Metrik**, durch

$$(f^*g_N)_p(v,w) \coloneqq g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

**Def.** Eine Immersion $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ heißt **isometrisch**, falls $g^M = f^*g^N$.

**Prop.** Sei $M$ eine zshgde Mft. Dann gibt es für alle $p,q \in M$ einen stückweise diff'baren Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$.

**Def.** Für $\gamma : [a,b] \to M$ stückweise $\mathcal{C}^1$ heißt

$$L(\gamma) \coloneqq \int_a^b \|\dot\gamma(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \quad \textbf{Länge} \text{ von } \gamma.$$

**Def.** Der **Riem. Abstand** auf $(M,g)$ ist geg. durch die Metrik

$$d_g : M \times M \to \mathbb{R}, \quad (p,q) \mapsto \inf\{\, L(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \to M \text{ stückweise } \mathcal{C}^1 \text{ mit } \gamma(a){=}p \text{ und } \gamma(b){=}q\,\}.$$

*Teaser.* Nach dem Satz von Hopf-Rinow stimmt die von $d_g$ induzierte Topologie mit der von $M$ überein.

# Kovariante Ableitungen

**Def.** Ein **Zusammenhang** (kov. Ableitung) ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \quad (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

sodass für $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:

- $\nabla_{X_1 + fX_2} Y = \nabla_{X_1} Y + f \nabla_{X_2} Y$
- $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- $\nabla_X (fY) = f\,(\nabla_X Y) + (X(f)) \cdot Y$ (*Leibniz-Regel*)

**Def.** Sei $\nabla$ ein Zusammenhang auf $M$. Dann heißt

$$T^\nabla(X,Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \qquad \textbf{Torsion} \text{ von } \nabla.$$

Wenn $T^\nabla \equiv 0$, dann heißt $\nabla$ **torsionsfrei**.

**Def.** Ein Zshg $\nabla$ auf einer Riem. Mft. heißt **metrisch**, wenn

$$\forall\, X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)\ :\ g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y,Z).$$

**Lem/Def.** Auf jeder Riem. Mft. $(M,g)$ gibt es genau einen torsionsfreien, metrischen Zusammenhang, den sogenannten **Levi-Civita-Zusammenhang** $\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}}$. Für diesen gilt:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ & + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) \end{aligned}$$

*Bem.* Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mft., $(U,\phi)$ eine Karte von $M$. Dann gibt es diff'bare Ftk. $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ für $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$, sodass

$$\nabla_{\left(\frac{\partial^\phi}{\partial x^i}\right)} \left(\frac{\partial^\phi}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^\phi}{\partial x^k}.$$

**Def.** Die Funktionen $\Gamma_{ij}^k$ heißen **Christoffel-Symbole** von $\nabla$.

**Lem.** $\left[\frac{\partial^\phi}{\partial x^j}, \frac{\partial^\phi}{\partial x^k}\right] = 0$

*Bem.* Aus dem Satz von Schwarz folgt die Symm. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

**Satz.** Für die Christoffel-Symbole gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left( \frac{\partial^\phi}{\partial x^j} g_{il} + \frac{\partial^\phi}{\partial x^i} g_{jl} - \frac{\partial^\phi}{\partial x^l} g_{ij} \right),$$

wobei $g_{ij} : U \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto g_p\left(\frac{\partial^\phi}{\partial x^i}(p), \frac{\partial^\phi}{\partial x^j}(p)\right)$
$g^{kl} : U \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $\sum_{r=1}^n g^{jr} g_{rk} = \delta_k^j$.

**Def.** Sei $\nabla$ ein Zusammenhang auf $M$. Dann heißt $X \in \mathcal{X}(M)$ **parallel**, falls $\nabla X : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),\ \ Y \mapsto \nabla_Y X$ verschwindet.

# Tensorfelder

**Def.** Ein **Tensorfeld** vom Typ $(j,k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0,1\}$ ist eine $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineare Abb.

$$T : \mathcal{X}(M)^k = \mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M) \to \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M), & \text{falls } j = 0, \\ \mathcal{X}(M), & \text{falls } j = 1. \end{cases}$$

**Bspe.**
- $T^\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ ist Tensor vom Typ $(1,2)$.
- $\nabla Y : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, $X \mapsto \nabla_X Y$ ist Tensor vom Typ $(1,1)$.
- Alternierende $k$-Formen auf $\mathbb{R}^n$ sind Tensoren vom Typ $(0,k)$.
- Riemannsche Metriken sind Tensorfelder vom Typ $(0,2)$.

**Gegenbsp.** $X \mapsto \nabla_Y X$ ist *kein* Tensor

**Satz.** Sei $T$ ein Tensorfeld auf $M$ vom Typ $(j,k)$. Sei $p \in M$. Seien $X_1,\ldots,X_k \in \mathcal{X}(M)$. Dann hängt $T(X_1,\ldots,X_k)(p)$ nur von $X_1(p),\ldots,X_k(p)$ ab.

*Bem.* Sei $(U,\phi)$ eine Karte von $M$ und $T$ ein Tensorfeld vom Typ $(1,k)$ auf $M$. Dann gibt es Funktionen $T^l_{i_1,\ldots,i_k}$, sodass

$$T(\tfrac{\partial^\phi}{\partial x^{i_1}},\ldots,\tfrac{\partial^\phi}{\partial x^{i_k}}) = \textstyle\sum_{l=1}^n T^l_{i_1,\ldots,i_k} \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^l}.$$

**Notation.** $\nabla_v Y := (\nabla_X Y)(p)$ für $v \in T_pM$ und $X$ ein VF mit $X_p = v$ (wohldefiniert).

**Satz.** Sei $\nabla$ ein Zusammenhang auf $M$. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ und $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{X}(M)$. Falls für eine $\mathcal{C}^\infty$-Kurve $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ gilt

$$c(0) = p, \ \ \dot{c}(0) = v \ \text{ und } \ \forall t \in (-\epsilon,\epsilon) : Y(c(t)) = \tilde{Y}(c(t)),$$

dann gilt $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$.

# Kovariante Ableitung längs Kurven

**Def.** Ein **VF längs einer Kurve** $c : I \to M$ ist eine Abbildung

$$X : I \to TM \quad \text{mit} \quad X(t) = X_t \in T_{c(t)}M,$$

welche diff'bar ist, d. h. für alle $t_0 \in I$ existiert eine Karte $(U,\phi)$ um $c(t_0)$, sodass man schreiben kann

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t) \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^i}|_{c(t)} \quad \text{für alle } t \in c^{-1}(U)$$

mit diff'baren Funktionen $\xi^i : c^{-1}(U) \to \mathbb{R}$.

*Bem.* $X_t$ muss nicht Einschränkung eines VF auf $M$ sein.

**Notation.** $\mathcal{X}_c := \{$ Vektorfelder längs $c$ $\}$

*Bem.* $\mathcal{X}_c$ ist ein Modul über $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

**Satz.** Sei $\nabla$ ein Zusammenhang auf $M$, sei $c : I \to M$ eine diff'bare Kurve. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\frac{\nabla}{dt} = \frac{D}{dt} = \frac{D^\nabla}{dt} : \mathcal{X}_c \to \mathcal{X}_c,$$

sodass für $X, \tilde{X} \in \mathcal{X}_c$, $Y \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ gilt:
- $\frac{D}{dt}(X + \tilde{X}) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}\tilde{X}$,
- $\frac{D}{dt}(f \cdot X) = f \cdot \frac{D}{dt}X + f'X$,
- $\frac{D(Y \circ c)}{dt} = \nabla_{\dot{c}} Y$.

**Def.** $\frac{D}{dt}$ heißt *von $\nabla$ induzierte* **kovariante Ableitung längs $c$**.

**Satz.** Sei $(M,g)$ eine Riem. Mft, $\nabla$ der Levi-Civita-Zusammenhang und $c : I \to M$ diff'bar. Dann gilt für alle $X, Y \in \mathcal{X}_c$:

$$g(X,Y)' = g(\tfrac{DX}{dt}, Y) + g(X, \tfrac{DY}{dt}).$$

# Parallelverschiebung

**Def.** $X \in \mathcal{X}_c$ heißt **parallel** *längs $c$* (bzgl. $\nabla$), wenn $\frac{DX}{dt} = 0$.

*Bem.* Sei $(U,\phi)$ eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koordinaten lässt sich Parallelität ausdrücken durch

$$(\xi^k)' + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t)\xi^j(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1,\ldots,n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Für die Funktionen $\xi^k$ ist das ein System linearer DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}' = A(t) \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Dieses System ist linear beschränkt, es folgt daher die Existenz von parallelen Vektorfeldern in Kartenumgebungen mit vorg. AW $X(t_0)$.

**Satz.** Sei $t_0 \in I = (a,b)$ und $v \in T_{c(t_0)}M$ vorgegeben. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}_c$ mit

$$\tfrac{DX}{dt} \equiv 0 \quad \text{und} \quad X(t_0) = v.$$

**Def.** Die **Parallelverschiebung** längs einer diff'baren Kurve $c : [a,b] \to M$ bzgl. eines Zshgs $\nabla$ ist

$$P_c : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M, \ \ v \mapsto X^v(b), \ \text{ wobei } \tfrac{DX^v}{dt} \equiv 0 \text{ und } X^v(a) = v.$$

**Satz.** $P_c$ ist linear. Ist $(M,g)$ Riem. und $\nabla$ der LC-Zshg, dann gilt

$$g_{c(b)}(P_c(v), P_c(w)) = g_{c(a)}(v,w).$$

Mit anderen Worten: $P_c$ ist dann eine lineare Isometrie.

*Bem.* Wir können nun die Definition der Ableitung als Limes des Differenzenquotienten auf Mften übertragen: Sei $v \in T_xM$, $X \in \mathcal{X}(M)$ und $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $c(0) = x$ und $\dot{c}(0) = v$. Dann ist

$$\nabla_v X = \lim_{t \to 0} \frac{P^{-1}_{c(t)}(X(c(t))) - X(c(0))}{t}$$

*Bem.* Parallelverschiebung ist auch möglich und sinnvoll entlang *stückweise* glatter Kurven.

**Def.** Die **Holonomiegruppe** von $M$ in $x \in M$ bzgl. $\nabla$ ist

$$\mathrm{Hol}^\nabla_x := \{P_c : T_xM \to T_xM \mid c \text{ stückweise glatt mit } c(0) = c(1) = x\}.$$

Dabei ist $P_c \circ P_{\tilde{c}} = P_{c \circ \tilde{c}}$ und $(P_c)^{-1} = P_{c^{-1}}$.

*Bem.* $\mathrm{Hol}^\nabla_x$ ist sogar eine Lie-Gruppe und Untergr. von $O(T_xM, g_x)$.

# Geodäten

**Def.** Eine glatte Kurve $c : I \to M$ heißt **Geodäte** bzgl. $\nabla$, falls

$$\frac{D^\nabla \dot{c}}{dt} \equiv 0, \quad \text{d. h. das Tangential-VF } \dot{c} \text{ ist parallel längs } c.$$

*Bem.* Sei $(U,\phi)$ eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koord. lässt sich diese Bed. ausdrücken durch die **Geodätengleichung**

$$(\dot{c}^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t)\dot{c}^j(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1,...,n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

**Satz.** Zu jedem $p \in M$ und $v \in T_pM$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und genau eine Geodäte $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.

**Lem.** Seien $c_{1,2} : I_{1,2} \to M$ zwei Geodäten bzgl $\nabla$ mit $0 \in I_1 \cap I_2$. Falls $c_1(0) = c_2(0)$ und $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$, dann gilt $c_1|_{I_1 \cap I_2} \equiv c_2|_{I_1 \cap I_2}$.

**Lem/Def.** Gegeben $p \in M$ und $v \in T_pM$, dann gibt es genau ein Intervall $I_v \Subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I_v$ und eine Geodäte

$$c_v : I_v \to M \quad \text{mit} \quad c_v(0) = p, \ \ \dot{c}_v(0) = v,$$

die maximal im folgenden Sinn ist: Für jede Geodäte $c : I \to M$ mit $\dot{c}(0) = v$ gilt: $I \subseteq I_v$ und $c = c_v|_I$.

**Notation.** Für $v \in T_pM$ sei $c_v : I_v \to M$ die zugeh. max. Geodäte.

**Def.** Ein Zshg $\nabla$ auf $M$ heißt **geodätisch vollständig**, wenn jede Geodäte auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, d. h. $\forall v \in TM : I_v = \mathbb{R}$.

# Die Exponentialabbildung

**Lem** (**Spray-Eigenschaft**). Ist $v \in T_pM$, $c_v : I_v \to M$ die maximale Geodäte mit $\dot{c_v}(0) = v$. Sei $\lambda \neq 0$, dann ist

$$c_{\lambda v} : I_{\lambda v} \to M, \ \ t \mapsto c_v(\lambda t) \quad \text{wobei} \quad I_{\lambda v} := \tfrac{1}{\lambda} I_v$$

die maximale Geodäte mit $\dot{c_{\lambda v}}(0) = \lambda v$.

**Def.** Sei $M$ eine Mft mit Zshg $\nabla$ und $p \in M$. Dann heißt

$$\mathrm{Exp}_p : \widetilde{T_pM} \to M, \ \ v \mapsto c_v(1), \quad \widetilde{T_pM} := \{v \in T_pM \mid 1 \in I_v\}$$

**Exponentialabbildung** von $\nabla$ in $p$. Ist $\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}}$, so wird sie **Riemannsche Exponentialabb.** genannt.

**Lem.**
- $\widetilde{T_pM}$ ist sternförmig bzgl. 0.
- $\forall v \in \widetilde{T_pM} : \forall t \in [0,1] : \mathrm{Exp}_p(tv) = c_v(t)$

**Satz.**
- Es gibt eine offene Umgebung $\hat{U} \Subset T_pM$ mit $0 \in \hat{U} \subseteq \widetilde{T_pM}$, sodass $\mathrm{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \to M$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung ist.
- Wir können $\hat{U}$ so wählen, dass $\mathrm{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \to \mathrm{Exp}_p(\hat{U})$ ein Diffeomorphismus ist.

*Bem.* Man kann zeigen:
- $\widetilde{T_pM} \Subset T_pM$
- $\mathrm{Exp}_p : \widetilde{T_pM} \to M$ ist überall $\mathcal{C}^\infty$, aber nicht überall ein lokaler Diffeomorphismus (*Schnittpunkt-Phänomen*)
- Ist $(M,\nabla)$ geodätisch vollständig, dann gilt $\widetilde{T_pM} = T_pM$.

# Erste Variationsformel

**Def.** Eine Kurve $c: I \to M$ heißt **nach** / **proportional zur BL parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\dot{c}(t)\| \equiv 1 \quad / \quad \|\dot{c}(t)\| \equiv \text{konst.}$$

*Bem.* • Jede Geodäte ist proportional zur BL parametrisiert.

• Eine Kurve $c: I \to M$ ist genau dann prop. zur BL parametrisiert, wenn es ein $\alpha \geq 0$ gibt mit $L(c|_{[a,b]}) = \alpha \cdot (b-a)$ für alle $[a,b] \subseteq I$.

**Def.** Eine **Variation** von $c: [a,b] \to M$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] \to M, \quad (s,t) \mapsto \alpha(s,t) \quad \text{mit } \forall\, t \in [a,b] \,:\, \alpha(0,t) = c(t).$$

Sie heißt **Variation mit festen Endpunkten**, wenn zudem gilt:

$$\forall\, s \in (-\epsilon,\epsilon) \,:\, \alpha(s,a) = c(a) \wedge \alpha(s,b) = c(b)$$

**Sprechweise.** $s$ heißt *Variationsparameter*

**Def.** Eine *Variation einer stückweise glatten Kurve* $c: [a,b] \to M$ (mit $c$ glatt auf den Teilintervallen $[t_{i-1}, t_i]$) ist eine stetige Abb.

$$\alpha: (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M, \quad (s,t) \mapsto \alpha_s(t)$$

mit $\alpha|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[t_{i-1},t_i]}$ ist $\mathcal{C}^\infty$. für alle $t$ und $\alpha_0 = c$.

**Notation.** • $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(s_0,t_0)$ ist der Tangentialv. an $s \mapsto \alpha(s,t_0)$ in $s_0$.

• $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(s_0,t_0)$ ist der Tangentialvektor an $s \mapsto \alpha(s_0,t)$ in $t_0$.

**Def.** Eine Abb. $X: (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] \to TM$ mit $X(s,t) \in T_{\alpha(s,t)}M$ heißt **Vektorfeld längs $\alpha$**, wenn $X$ (stückweise) differenzierbar ist.

**Notation.** Für ein VF $X$ längs $\alpha(s,t)$ setze

$$\tfrac{DX}{\partial s}(s_0,t_0) := \tfrac{D}{\mathrm{d}s}|_{s=s_0} X(s,t_0), \qquad \tfrac{DX}{\partial t}(s_0,t_0) := \tfrac{D}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} X(s_0,t).$$

**Lem.** $\dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = \dfrac{D}{\partial t}\dfrac{\partial\alpha}{\partial s}$

**Sprechweise.** $X(t) := \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$ heißt **Variationsvektorfeld** (VVF).

**Satz** (**1. Variationsformel**)**.** Sei $\alpha: (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] \to M$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Variation von einer $\mathcal{C}^\infty$-Kurve $c = \alpha_0 : [a,b] \to M$. Sei $\|\dot{c}(t)\| = \text{konst} \neq 0$. Dann gilt mit $X(t) := \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0} L(\alpha_s) = \frac{1}{\|\dot{c}\|}\left( g(X,\dot{c})|_a^b - \int_a^b g(X(\tau), \tfrac{D\dot{c}}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}\tau \right)$$

**Satz** (**1. Variationsformel** für stückweise glattes $c$)**.** Sei $\alpha: (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] \to M$ eine stückweise glatte Variation, glatt auf $(-\epsilon,\epsilon)\times[t_{i-1},t_i]$ mit $a = t_0 < \ldots < t_k = b$. Dann ist

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0} L(\alpha_s) = \frac{1}{\|\dot{c}\|}\left( g(X,\dot{c})|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g(X(t_i), \nabla_i \dot{c}) - \int_a^b g(X, \tfrac{D\dot{c}}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}t \right)$$
$$\text{mit } \nabla_i \dot{c} = \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)$$

**Notation.** $\dot{c}(t_i^+) = \lim_{t\downarrow t_i} \dot{c}(t)$, $\quad \dot{c}(t_i^-) = \lim_{t\uparrow t_i}\dot{c}(t)$

**Frage.** Welche $X \in \mathcal{X}_c$ sind Variations-VF?

**Satz.** Zu jedem (stückw.) glatten $X \in \mathcal{X}_c$ gibt es eine (stückw.) glatte Variation $\alpha$ von $c$ mit $X = \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$. Wenn $X(a) = X(b) = 0$, so kann man $\alpha$ als Variation mit festen Endpunkten wählen.

**Satz.** Für $c: [a,b] \to M$ stückw. glatt mit $\|\dot{c}\| = \text{konst}$ sind äquiv.:

- $c$ ist eine Geodäte
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0} L(\alpha_s) = 0$ für jede stückweise glatte Variation $\alpha$ von $c$ mit festen Endpunkten.

**Kor.** Sei $c: [a,b] \to M$ stückweise glatt und kürzeste stückweise Verbindung ihrer Endpunkte (d. h. für alle $\tilde{c}: [a,b] \to M$ stückweise glatt mit $c(a) = \tilde{c}(a)$ und $c(b) = \tilde{c}(b)$ ist $L(c) \leq L(\tilde{c})$). Dann ist $c$ eine glatte Geodäte.

**Achtung.** Geodäten sind i. A. nicht global kürzeste Verbindungen, die Umkehrung gilt also nicht!

**Notation.** $\Omega_{p,q} := \{c: [0,1] \to M \mid c(0)=p, c(1)=q, c \text{ stückw. glatt}\}$

*Bem.* Geodäten sind „kritische Punkte“ von $L: \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $\|\dot{c}\| = \text{konst}$. Nimmt man stattdessen die *Energie*

$$E(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

so ist diese Nebenbedingung unnötig.

# Geodäten sind lokal kürzeste

**Notation.** $S_\rho(0) = \{x \in T_pM \mid \|x\| = \rho\}$

**Satz** (**Gaußlemma**)**.** Sei $(M,g)$ eine zshgde Riem. Mft, $\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}}$. Sei $p \in M$ und $\epsilon > 0$, sodass $\mathrm{Exp}_p|_{B_\epsilon(0)}$ ein Diffeo ist. Dann schneiden die radialen Geodäten

$$t \mapsto \mathrm{Exp}_p(tv) = c_v(t), \quad v \in T_pM \setminus \{0\},$$

die Hyperflächen $\mathrm{Exp}_p(S_\rho(0))$, $\rho \in (0,\epsilon)$ orthogonal.

**Satz.** Seien $p \in M$, $\epsilon > 0$, $\rho \in [0,\epsilon)$ wie eben. Dann ist

$$c_v|_{[0,\rho]} : [0,\rho] \to M, \quad t \mapsto c_v(t) = \mathrm{Exp}_p(tv) \qquad (v \in T_pM, \|v\| = 1)$$

die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte, genauer:
Es gilt $\rho = L(c_v|_{[0,\rho]}) \leq L(\gamma)$ für jedes $\gamma: [a,b] \to M$ stückweise glatt mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = c_v(\rho)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma(t) = c_v(r(t))$ mit $r: [a,b] \to [0,\rho]$ monoton wachsend.

**Def.** $i(p) := \sup\{\epsilon > 0 \mid \mathrm{Exp}_p|B_\epsilon(0) \text{ ist Diffeo aufs Bild}\}$ heißt *Injektivitätsradius* von $M$ in $p$.

**Satz.** Sei $M$ eine zshgde Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- Ist $p \in M$, $\epsilon \in (0, i(p))$, dann ist
$$\mathrm{Exp}_p(B_\epsilon(0)) = B_\epsilon(p) := \{q \in M \mid d(p,q) < \epsilon\},$$
$$\mathrm{Exp}_p(S_\epsilon(0)) = S_\epsilon(p) := \{q \in M \mid d(p,q) = \epsilon\}.$$
- $d: M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik.
- Die durch $d$ ind. Topologie stimmt mit der gegebenen überein.

# Sätze von Hopf-Rinow

**Satz** (**Hopf-Rinow** 1)**.** Sei $M$ eine zshgde Riem. Mft, $p \in M$. Angenommen, alle Geodäten $\gamma$ auf $M$ mit $\gamma(0) = p$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (m.a.W: $\mathrm{Exp}_p$ ist auf ganz $T_pM$ definiert). Dann gibt es für alle $q \in M$ eine kürzeste Geodäte von $p$ nach $q$.

**Satz** (**Hopf-Rinow** 2)**.** Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit $M$ sind äquivalent:

- $M$ ist geodätisch vollständig.
- $\forall\, p \in M$ : $\mathrm{Exp}_p$ ist auf ganz $T_pM$ definiert.
- Beschränkte und abgeschlossene Teilmengen von $M$ sind kompakt.
- $(M,d)$ ist als metrischer Raum vollständig, d. h. jede Cauchy-Folge konvergiert.

**Kor.** Jede kompakte Riem. Mft ist geodätisch vollständig und zwei ihrer Punkte können durch eine kürzeste Geodäte verbunden werden.

**Kor.** Unter-Mften des $\mathbb{R}^n$ sind geodätisch vollständig.

# Krümmung

**Def.** Der **Krümmungstensor** von einem Zshg $\nabla$ auf $M$ ist

$$R^\nabla = R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$
$$(X,Y,Z) \mapsto R(X,Y)Z := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

*Bem.* $R^\nabla$ ist ein (1,3)-Tensor.

**Notation.** $R_p(u,v)w := (R(X,Y)Z)(p)$ für $u,v,w \in T_pM$, wobei $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ mit $X(p) = u$, $Y(p) = v$, $Z(p) = w$.

**Satz.** Es gilt für $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$:

- $-R(X,Y)Z = R(Y,X)Z$
- Falls $\nabla$ torsionsfrei: **1. Bianchi-Identität** / **Jacobi-Identität**:
$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0.$$
- Ist $(M,g)$ Riemannsch und $\nabla$ metrisch, dann gilt
$$g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z).$$
- Ist $\nabla$ der LC-Zshg von $(M,g)$ Riemannsch, dann ist
$$g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y).$$

**Def.** Sei $p \in M$, $\sigma = \mathrm{span}(v,w) \in T_pM$ ein 2-dim UVR. Dann heißt

$$\sec(\sigma) = \kappa(\sigma) := \frac{g(R(v,w)w,v)}{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - g(v,w)^2}$$

**Riemannsche Schnittkrümmung** von $\sigma$.

**Lem.** $\sec(\sigma)$ ist unabhängig von der Basiswahl.

*Bem.* Gauß' *Theorema egregium* für Flächen $M \subset \mathbb{R}^3$ besagt:

$$\forall\, p \in M \,:\, \kappa(p) = \sec(T_pM) = \tfrac{R_{1221}(p)}{\det(g_p)}$$

## Zweite Variation der Länge

**Satz.** Sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ eine glatte Variation einer Kurve $\alpha_0 : [a,b] \to M, t \mapsto \alpha(0,t)$. Sei $X : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to TM$ ein VF längs $\alpha$. Dann gilt:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{DX}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{DX}{\partial s} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) X$$

**Satz** (**2. Variationsformel** für die Länge)**.** Sei $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ eine glatte Variation von $c$ mit festen Endpunkten, $X(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t) \in \mathcal{X}_c$ das VVF mit $X^\perp := X - g(X, \frac{\dot c}{\|\dot c\|})\frac{\dot c}{\|\dot c\|}$ senkrechtem Anteil zu $\dot c$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}|_{s=0} L(\alpha_s) = \tfrac{1}{\|\dot c\|}\int_a^b \|\tfrac{DX^\perp}{\mathrm{d}t}\|^2 - g(R(X,\dot c)\dot c, X)\,\mathrm{d}t.$$

**Kor.** Ist $(M,g)$ eine Riem. Mft mit $\sec \le 0$, so ist die Geodäte $c$ ein (lokales) Minimum für alle Variationen $\alpha$ von $c$ mit festen Endpunkten und Variations-VF $X$ mit $X^\perp \neq 0$.

## Satz von Myers

**Def.** Der **Durchmesser** einer Riemannschen Mft $(M,g)$ ist

$$\operatorname{diam}(M) := \sup\{d(p,q) \mid p,q \in M\}.$$

**Satz** (**Myers** 1935)**.** Jede vollständige zshgde Riem. Mft. mit $\sec \ge \delta > 0$ ist kompakt mit Durchmesser $\operatorname{diam}(M) \le \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

*Bem.* $M = S^n_r \implies \sec = r^{-2} \implies$ Schranke ist optimal

**Kor.** Sei $M$ eine vollständige zshgde Riem. Mft, $\dim(M) \ge 2$ mit $\sec \ge \delta > 0$. Dann ist $\pi_1(M)$ endlich.

**Def.** Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ mit $\|v\| = 1$, $v = e_1, e_2, \dots, e_n$ eine ONB von $T_pM$. Die **Ricci-Krümmung** von $M$ in Richtung $v$ ist dann

$$\operatorname{Ric}(v) := \sum_{j=2}^n \sec(\operatorname{span}(v, e_j)).$$

*Bem.* $\operatorname{Ric}(v)$ ist unabhängig von der Wahl der ONB:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(v) &= \textstyle\sum_{j=2}^n \sec(v,e_j) &&= \textstyle\sum_{j=2}^n g(R(e_j,v)v,e_j)\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n g(R(e_j,v)v,e_j) &&= \operatorname{spur}(x \mapsto R(x,v)v)\end{aligned}$$

**Def.** $\operatorname{Ric}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto \operatorname{spur}(x \mapsto R(x,v)w)$ heißt **Ricci-Tensor**.

*Bem.* Der Ricci-Tensor ist ein (2,0)-Tensor und es gilt:
- $\operatorname{Ric}_p(v,w) = \operatorname{Ric}_p(w,v)$,
- $\operatorname{Ric}(v) = \operatorname{Ric}(v,v)$.

**Def.** $(M,g)$ heißt **Einstein-Mft**, wenn die Ricci-Krümmung konstant ist, d. h. $\forall\, p \in M : \forall\, x,y \in T_pM : \operatorname{Ric}(x,y) = c \cdot g(x,y)$.

**Beob.**
- $\sec \ge \delta \implies \operatorname{Ric}(v) \ge (n-1)\delta$
- Mften mit konstanter Schnittkrümmung sind Einstein.

**Satz** (**Myers**)**.** Jede vollständige zshgde Riem. Mft. mit $\operatorname{Ric} \ge (n-1)\delta$ ist kompakt mit Durchmesser $\operatorname{diam}(M) \le \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

## Jacobi-Felder

**Def.** Sei $(M,g)$ eine Riem. Mft., $c : I \to M$ glatt, $Y \in \mathcal{X}_c$ heißt **Jacobi-Feld**, wenn die **Jacobi-Gleichung** gilt:

$$Y'' + R(Y, \dot c)\dot c = 0 \quad (\text{mit } Y'' := \tfrac{D}{\mathrm{d}t}(\tfrac{DY}{\mathrm{d}t})).$$

*Bem.* $\{X \in \mathcal{X}_c \mid X \text{ ist ein Jacobi-Feld}\}$ ist ein UVR von $\mathcal{X}_c$.

**Satz.** Sei $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ eine glatte Variation von $c = \alpha_0$ durch Geodäten (d. h. $\alpha_s$ ist Geodäte für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$). Dann ist das VVF $X = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t)$ ein Jacobi-Feld.

**Satz.** Sei $c : I \to M$ eine Kurve, $t_0 \in I$. Dann gibt es für alle $v, w \in T_{c(t_0)}M$ genau ein Jacobi-Feld $Y \in \mathcal{X}_c$ mit

$$Y(t_0) = v \quad \text{und} \quad Y'(t_0) = w.$$

**Kor.** Umkehrung zum vorletzen Satz: Jedes Jacobi-Feld längs einer Geodäten ist das Variations-VF einer Variation durch Geodäten. Die Variation lässt sich expl. über die Exponentialabb. konstruieren.

**Satz.** Sei $v \in T_pM$, $w \in T_pM \cong T_v(T_pM)$.
Dann gilt $(\operatorname{Exp}_p)_{*v}(w) = Y(1)$, wobei $Y \in \mathcal{X}_c$ ein Jacobi-Feld längs $c_v(t) = \operatorname{Exp}_p(tv)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y'(0) = w$ ist.

## Satz von Hadamard-Cartan

**Satz.** Sei $Y$ ein Jacobifeld längs einer Geodäten $c$ in $(M,g)$.
Wenn $\sec \le 0$, dann gilt
- $(t \mapsto \|Y(t)\|^2)$ ist konvex.
- Wenn $Y$ zwei verschiedene Nullstellen hat, dann $Y \equiv 0$.
- Es gibt keine konjugierten Punkte längs $c$, d. h. für je zwei versch. Punkte $a, b \in \operatorname{im}(c)$ gibt es kein Jacobi-Feld $Y$ längs $c$ mit $Y(a) = 0$, $Y(b) = 0$, aber $Y_{[a,b]} \not\equiv 0$.

**Kor.** Falls $(M,g)$ vollständig mit $\sec \le 0$, dann ist $\operatorname{Exp}_p$ für alle $p$ ein lokaler Diffeomorphismus, d. h.

$$\forall\, v \in T_pM : \exists\, U_v \Subset T_pM : \operatorname{Exp}_p|_{U_v} : U_v \to \operatorname{Exp}_p(U_v) \text{ ist Diffeo.}$$

**Wiederholung.** Sei $X$ wegzshgd, $Y$ einfach zshgd, $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung. Dann ist $\pi$ ein Homöomorphismus.

**Def.** Eine Abb. $\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ zwischen Riem. Mften heißt **Riemannsche Überlagerung**, wenn gilt:
- $\pi$ ist eine topologische Überlagerung
- $\pi$ ist diffbar
- $\pi_{*p} : T_pM_1 \to T_{\pi(p)}M_2$ ist eine orthogonale Abb f. a. $p \in M_1$.

**Satz.** Sei $\pi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ eine surjektive lokale Isometrie zwischen Riem. Mften. Wenn $M_1$ vollständig ist, dann ist $\pi$ eine Riemannsche Überlagerung.

**Satz** (**Cartan-Hadamard**)**.** Sei $(M,g)$ eine vollständige, zshgde Riemannsche Mft. mit Schnittkrümmung $\sec \le 0$, $p \in M$.
Dann ist $\operatorname{Exp}_p : T_pM \to M$ eine Überlagerung.

**Kor.** Falls $(M^n, g)$ zusätzlich einfach zshgd ist, dann gilt $M \cong \mathbb{R}^n$.
Je zwei Punkte in $M$ lassen sich durch genau eine nach BL param. Geodäte verbinden (bis auf Umkehrung, Parametershift).

## Satz von Synge

**Satz** (**Weinstein** 1968, **Synge** 1936)**.** Sei $M^n$ kompakte, zshgde, orientierte Riem. Mft, $\sec > 0$, $n$ gerade. Sei $f : M^n \to M^n$ eine orientierungstreue Isometrie. Dann hat $f$ einen Fixpunkt.

**Satz** (**Synge** 1936)**.** Jede zshgde kompakte orientierte Riem. Mft gerader Dimension mit $\sec > 0$ ist einfach zshgd.

*Bem.* Keine der Voraussetzung kann weggelassen werden, wie die Beispiele der projektiven Räume $\mathbb{R}P^2$ und $\mathbb{R}P^3$ zeigen.

## Symmetrische Räume

**Prop.** Sei $(M,g)$ eine vollständige Riem. Mft, $p \in M$. Seien $f, g \in \operatorname{Iso}(M)$. Wenn $f(p) = g(p)$ und $f_{*p} = g_{*p}$, dann gilt $f \equiv g$.

**Def.** Sei $P$ eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Mft $P$ heißt **symmetrischer Raum**, wenn

$$\forall\, p \in P : \exists\, s_p \in \operatorname{Iso}(P) : s_p(p) = p \;\wedge\; (s_p)_{*p} = -\operatorname{id}_{T_pP}.$$

Sie heißt **lokal symm. Raum**, falls für jeden Punkt $p \in P$ eine *lokale* Isometrie $s_p : U_p \to M$ mit obigen Eigenschaften existiert.

**Sprechweise.** $s_p$ heißt **(geodätische) Spiegelung** in $p$.

**Lem.** Sei $P$ ein symmetrischer Raum, $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to P$ eine Geodäte, $p = \gamma(0)$. Dann gilt $\forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon) : (s_p \circ \gamma)(t) = \gamma(-t)$.

**Lem.** Sei $P$ ein sym. Raum, $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to P$ eine Geodäte, $\gamma(0) = p$, $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$, $q := \gamma(\tau)$. Dann gilt $(s_q \circ s_p)(\gamma(t)) = \gamma(t + 2\tau)$, wenn $t + 2\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$.

**Kor.** Symmetrische Räume sind geodätisch vollständig.

**Def.** Eine Riem. Mft $M$ heißt **homogen** (homogener Raum), wenn

$$\forall\, p, q \in M : \exists\, f \in \operatorname{Iso}(M,g) : f(p) = q.$$

**Lem.** Symmetrische Räume sind homogen.

**Lem.** Sei $P$ ein symm. Raum, $p, q \in P$, $f \in \operatorname{Iso}(P)$ mit $f(p) = q$. Dann gilt $s_q = f \circ s_p \circ f^{-1}$.

**Kor.** Ist $(M,g)$ eine homogene zshgde Riem. Mft, sodass

$$\exists\, m \in M : \exists\, s_m \in \operatorname{Iso}(M) : s_m(m) = m \text{ und } (s_m)_{*m} = -\operatorname{id}_{T_mM}.$$

Dann ist $M$ ein symmetrischer Raum.

**Def.** Sei $M$ eine Mft mit Zshg $\nabla$. Sei $T$ ein Tensorfeld auf $M$ vom Typ $(1,k)$. Dann ist $\nabla T$ das durch

$$(\nabla T)(X_1, ..., X_k, Y) := \nabla_Y(T(X_1, ..., X_k)) - \sum_{i=1}^k T(X_1, ..., \nabla_Y X_i, ..., X_k)$$

definierte Tensorfeld vom Typ $(1, k+1)$.

**Bsp.** Sei $(M,g)$ Riem, $\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}}$. Dann gilt $\nabla g = 0$ ($\nabla$ metrisch).

**Def.** $T$ heißt **parallel**, wenn $\nabla T = 0$.

**Satz.** $P$ lokal symmetrisch $\iff \nabla^{\mathrm{LC}} R = 0$

## Transvektionen und Holonomie

**Notation.** Sei $P$ im Folgenden ein symmetrischer Raum.

**Def.** Eine **Transvektion** von $P$ ist eine Isometrie der Form

$$t_{pq} = s_p \circ s_q \quad \text{mit } p, q \in P,$$

d. h. ein Produkt geodätischer Spiegelungen.

**Bsp.** Im $\mathbb{R}^n$ sind die Transvektionen genau die Translationen.

**Def.** Die von den Transvektionen erzeugte abgeschl. Untergruppe

$$\mathrm{Trans}(P) \coloneqq \langle t_{pq} \mid p, q \in P \rangle_c \subset \mathrm{Iso}(P)$$

heißt **Transvektionsgruppe** von $P$.

**Lem.** Sei $\gamma : \mathbb{R} \to P$ eine Geodäte, $p = \gamma(0)$, $X \in \mathcal{X}_\gamma$ parallel. Sei

$$Y \coloneqq (s_p)_* X : \mathbb{R} \to TP, \quad t \mapsto (s_p)_{*\gamma(t)} X(t)$$

Dann gilt $Y(t) = -X(-t)$.

**Lem.** Sei $\gamma : \mathbb{R} \to P$ eine Geodäte. Dann gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$:
- $(t_{\gamma(\tau)\gamma(0)} \circ \gamma)(t) = \gamma(t + 2\tau)$ für alle $t \in \mathbb{R}$
- $(t_{\gamma(\tau)\gamma(0)*} X)(t) = X(t + 2\tau)$ für $X \in \mathcal{X}_\gamma$ parallel.

**Lem.** Sei $\gamma : \mathbb{R} \to P$ eine Geodäte. Dann ist die Abbildung

$$t^\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{Iso}(P), \quad \tau \mapsto t_{\gamma(\tau/2)\gamma(0)}$$

eine Ein-Parameter-Untergruppe.

**Def.** $t^\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{Iso}(P)$ heißt **Transvektion** längs $\gamma$.

**Satz.** Jede maximale Geodäte in $P$ ist Bahn einer 1-Parameter-UG von Isometrien, nämlich von $\gamma(\tau) \coloneqq (t^\gamma(\tau))(c(0))$.

**Def.** $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Periode** einer Geodäten $\gamma$, wenn f. a. $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\gamma(t) = \gamma(t + \lambda)$. Die Menge aller Perioden wird mit $P_\gamma$ bezeichnet.

**Lem.** Sei $b > a$ und $c(a) = c(b)$. Dann ist $\lambda \coloneqq b - a \in P_\gamma$.

**Kor.** Hat eine Geodäte $\gamma$ in $P$ einen Selbstschnitt, so ist $\gamma$ periodisch. Sei $\lambda_0$ die minimale nichttriviale Periode einer nichttrivialen Geodäten $\gamma$ in $P$. Dann ist $\gamma|_{[t, t+\lambda_0)}$ injektiv für alle $t$.

**Satz (Sphärensatz).** Sei $M^n$ eine kompakte, einfach zsghde Riem. Mft. mit $\frac{1}{4} < \sec \leq 1$. Dann ist $M$ diffeomorph zur $n$-Sphäre.

**Def.** Sei $M$ eine Riem. Mft, $p \in M$.

$$\mathrm{Iso}_p(M) \coloneqq \{f \in \mathrm{Iso}(M) \mid f(p) = p\} \quad \text{heißt } \textbf{Isotropiegruppe} \text{ von } p.$$

**Lem.** Seien $p, q \in M$, $f \in \mathrm{Iso}(M)$ mit $f(p) = q$. Dann ist

$$\mathrm{Iso}_q(M) = \{f \circ g \circ f^{-1} \mid g \in \mathrm{Iso}_p(M)\}.$$

**Kor.** Ist $M$ homogen, so sind alle Isotropiegruppen isomorph.

*Bem.* Sei $M$ zshgd, vollständig. Dann ist

$$\phi : \mathrm{Iso}_p(M) \to O(T_pM), \quad f \mapsto f_{*p}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

**Satz.** $\phi(\mathrm{Iso}_p(M))$ ist abgeschlossen in $O(T_pM)$, also kompakt.

**Satz.** Sei $P$ ein sym. Raum. Dann ist $\mathrm{Hol}_p(P) \subseteq \phi(\mathrm{Iso}_p(P))$.

*Bem.*
- Umkehrung: Sei $M$ eine einfach zshgde, Riem. Mft. mit $\mathrm{Hol}_p(M) \subseteq \phi(\mathrm{Iso}_p(M))$. Dann ist $P$ ein symmetrischer Raum.
- Für $P = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ gilt $\mathrm{Hol}_p(P) \subsetneq \phi(\mathrm{Iso}_p(P))$.
- Für eine zshgde, vollst. Riem. Mft. $M$ gilt:

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{Iso}_p(M)) &\subseteq \text{Normalisator von } \mathrm{Hol}_p(M) \text{ in } O(T_pM) \\ &= \{g \in O(T_pM) \mid g \,\mathrm{Hol}_p(M) g^{-1} = \mathrm{Hol}_p(M)\}.\end{aligned}$$

**Satz.** Sei $P$ ein kompakter sym. Raum. Dann ist $\pi_1(P)$ abelsch.

**Def.** Eine **Darstellung** einer Gruppe $G$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ mit $V$ ein Vektorraum.

**Def.** Eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ heißt **irreduzibel**, wenn

$$\forall\, U \subset V \text{ UVR} : (\forall\, g \in G : \rho(g)(U) = U) \implies U \in \{\{0\}, V\}.$$

**Def.** Eine Riem. Mft $M$ heißt **Isotropie/Holonomie-irreduzibel**, wenn gilt: Für alle $p \in M$ wirkt $\mathrm{Iso}_p(M)$ / $\mathrm{Hol}_p(M)$ irred. auf $T_pM$.

*Bem.* Für $P$ symmetrisch: $P$ Holonomie-irr. $\implies$ $P$ Isotropie-irr.

**Satz/Def.** Sei $(M, g)$ eine einfach zshgde vollständige Riem. Mft. Dann ist $M$ isometrisch zu einem Riemannschen Produkt

$$M \cong M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_k \quad (\textbf{De-Rham-Zerlegung}) \quad \text{mit}$$

- $M_0$ ist ein euklidischer VR (evtl. $\{0\}$).
- $M_1, \ldots, M_k$ sind vollständige, einfach zshgde, unzerlegbare (im Sinne dieses Satzes), Holonomie-irreduzible Riem. Mften.

**Satz.** Sei $P$ ein zshgder, de-Rham-unzerlegbarer sym. Raum. Dann ist $P$ Isotropie-irreduzibel.

**Lem.** Sei $(M, g)$ ein Isotropie-irreduzibler homogener Raum und $B : TM \times TM \to \mathbb{R}$ ein symmetrischer $(0, 2)$-Tensor. Angenommen, $B$ ist Isometrie-invariant, d. h.

$$\forall\, f \in \mathrm{Iso}(P) : \forall\, p \in M : \forall\, x, y \in T_pM : B_{f(p)}(f_{*p}x, f_{*p}y) = B_p(x, y).$$

Dann gilt $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : B = \lambda \cdot g$.

**Satz.** Zshgde Isotropie-irred. homogene Räume sind Einsteinsch.

## Killing-Felder

**Def.** Eine **Wirkung** einer eine Lie-Gruppe $G$ auf einer diff'baren Mft $M$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$, sodass $G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto \phi(g)(m)$ glatt ist.

**Def.** Das **Wirkungsvektorfeld** von $\phi$ zu $x \in \mathfrak{G} \cong T_eG$ ist

$$X^\phi : M \to TM, \quad p \mapsto \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \phi_{g_x(t)}(p).$$

Dabei ist $g_x : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ glatt mit $g_x(0) = e$, $\dot{g_x}(0) = x$.

**Lem.** Sei $G$ eine Lie-Gruppe, $X \in \mathcal{X}(G)$ ein linksinvariantes VF. Dann ist die Integralkurve $c_e$ eine 1-Parameter-Untergruppe von $G$.

**Lem.** Sei $X \in \mathcal{X}(G)$ linksinvariant. Dann ist $c_g = L_g \circ c_e$.

**Lem.** Jede 1-Param-UG $\phi : \mathbb{R} \to G$ definiert ein linksinv. VF $X \in \mathcal{X}(G)$, dessen Integralkurve durch $e$ gerade $\phi$ ist: $c_e = \phi$.

**Fazit.** $\forall\, x \in T_eG : \exists!\, \text{1-Param-UG } \phi_x : \mathbb{R} \to G : \dot{\phi_x}(0) = x$

**Def.** Die **Exponentialabbildung** der Lie-Gruppe $G$ ist

$$\exp : T_eG \cong \mathfrak{G} \to G, \quad x \mapsto \phi_x(1).$$

*Bem.* Wenn $G$ eine bi-inv. Metrik hat, dann ist $\exp = \mathrm{Exp}_e$.

**Def.** Ein VF $X \in \mathcal{X}(M)$ heißt **Killing-Feld**, wenn die lokalen Flüsse $\Phi_t$ von $X$ aus lokalen Isometrien bestehen, d. h.

$$\forall\, x \in U : \forall\, v, w \in T_xM : g_{\Phi_t(x)}(\Phi_{t*}v, \Phi_{t*}w) = g_x(v, w).$$

**Notation.** $KF(M) \coloneqq \{X \in \mathcal{X}(M) \mid X \text{ Killing}\}$

**Lem.** Für $X \in KF(M)$ gilt: $\forall\, v \in T_pM : \frac{D}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \Phi_{t*}v = \nabla_v X$

**Lem.** Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ ist genau dann ein Killing-VF, wenn $\nabla X$ schiefsymmetrisch ist, d. h.

$$\forall\, Y, Z \in \mathcal{X}(M) : g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$$

**Facts.** Sei $X \in KF(M)$.
- $KF(M)$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathcal{X}(M)$.
- Für jede Geodäte $\gamma$ ist $X \circ \gamma \in \mathcal{X}_\gamma$ ein Jacobi-Feld längs $\gamma$.
- $\forall\, A, B \in \mathcal{X}(M) : L_X(A, B) \coloneqq \nabla_A \nabla_B X - \nabla_{\nabla_A B} X + R(X, A)B = 0$
- Ist $(M, g)$ vollständig, dann ist $\Phi_t : M \to M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

**Satz.** Sei $P$ ein sym. Raum, $G \coloneqq \mathrm{Iso}(P)$, $\mathfrak{G} \coloneqq \mathcal{L}(G) \cong T_eG$ die Lie-Algebra von $G$. Dann ist die Abbildung

$$\iota : \mathfrak{G} \to KF(P), \quad x \mapsto (X : p \mapsto \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_0 \exp(tx).p)$$

ein $\mathbb{R}$-VR-Isomorphismus.

**Achtung.** Es gilt $\iota([x, y]_{\mathfrak{G}}) = -[\iota(x), \iota(y)]_{\mathcal{X}(P)}$, es ist $\iota$ also fast (bis auf Vorzeichen) ein Lie-Algebra-Isomorphismus.

**Def.** Sei $P$ ein symmetrischer Raum, $p \in P$. Setze

$$\begin{aligned} k_p &\coloneqq \iota^{-1}(\{X \in KF(P) \mid X(p) = 0\}) \subset \mathfrak{G}, \\ p_p &\coloneqq \iota^{-1}(\{X \in KF(P) \mid \nabla X(p) = 0\}) \subset \mathfrak{G}. \end{aligned}$$

**Lem.** Sei $P$ ein symmetrischer Raum, $p \in P$. Dann gilt

$$\forall\, v \in T_pP \,:\, \exists!\, \tilde{v} \in p_p \,:\, \forall\, s \in \mathbb{R} \,:\, \exp(s\tilde{v}) = t^{\gamma_v}(s).$$

**Prop.** $k_p = \mathfrak{G}_p \coloneqq \mathcal{L}(\mathrm{Iso}_p(P)) \cong T_e \,\mathrm{Iso}_p(P)$

**Prop.** $\mathfrak{G} = p_p \oplus k_p$ (direkte Summe von UVR)

**Prop (Cartan-Relationen).**

- $[k_p, k_p]_{\mathfrak{G}} \subseteq k_p$
- $[k_p, p_p]_{\mathfrak{G}} \subseteq p_p$
- $[p_p, p_p]_{\mathfrak{G}} \subseteq k_p$

**Prop.** Sei $\mathfrak{G} = k \oplus p$ eine Zerlegung einer reellen Lie-Algebra. Es gelten die Cartan-Relationen genau dann, wenn es eine Involution $\nabla : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ (d. h. ein Lie-Algebra-Autom. mit $\nabla^2 = \mathrm{id}$) gibt, sodass $k$ der ER zum EW $+1$ und $p$ der ER zum EW $-1$ von $\nabla$ ist.

**Prop.** Sei $P$ ein symmetrischer Raum, $p \in P$. Dann ist

$$R_p : p_p \to T_pP, \quad x \mapsto \iota(x)(p)$$

ein VR-Isomorphismus und es gilt

$$(R(\iota(v), \iota(w))\iota(u))(p) = \iota([u, [v, w]_{\mathfrak{G}}]_{\mathfrak{G}})(p).$$

**Kor.** Sei $P$ ein symmetrischer Raum. Dann ist

$$R_p(a, b) : T_pP \to T_pP, \quad x \mapsto R_p(a, b)x$$

eine Derivation von $R_p$, d. h. für alle $A, B, X, Y, Z \in \mathcal{X}(P)$ gilt

$$R(A, B)(R(X, Y)Z) = R(R(A, B)X, Y)Z + R(X, R(A, B)Y)Z + R(X, Y)(R(A, B)Z).$$